Beweis: (i) ist ganz einfach:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)|$$

$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| \overset{(a_n)\text{ konv.}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N = N(\frac{\varepsilon}{2})$.

(ii) ist nicht selbstverständlich, sondern eine tiefliegende Eigenschaft der reellen Zahlen! $\rightsquigarrow$ Vollständigkeit ∎

Satz 2.4: (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

Satz 2.5: Ist (a_n) konvergent, dann ist der Grenzwert eind. best.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ seien a und $\tilde{a}$ zwei Grenzwerte von (a_n),

d.h. $|a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N_1(\varepsilon)$ und $|a_n - \tilde{a}| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N_2(\varepsilon)$.

Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ folgt damit

$$|a - \tilde{a}| = |(a - a_n) + (a_n - \tilde{a})| \leq |a - a_n| + |\tilde{a} - a_n| < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ beliebig klein $\Rightarrow$ $a = \tilde{a}$. ∎

Mit konvergenten Folgen kann man rechnen!

$(a_n), (b_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n + b_n), (\alpha a_n), \alpha \in \mathbb{R}$ konvergent

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$; $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$.

2.2 Konvergenzkriterien

Definition 2.6 : $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

<u>monoton wachsend</u> $:\Leftrightarrow \forall n < m : a_n \leq a_m$

<u>streng monoton wachsend</u> $:\Leftrightarrow \forall n < m : a_n < a_m$

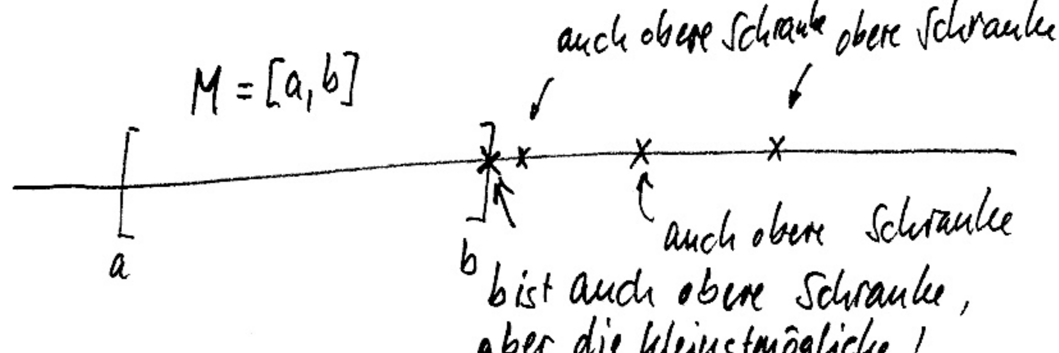
<u>nach oben beschränkt</u> $:\Leftrightarrow \exists C : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq C$

<u>analog</u>: mon. fallend, nach unten beschränkt

Über monotone wachsende (fallende), nach oben (unten) beschränkte Folgen können wir viel sagen!

Brauchen neue Begriffe:

- Für $M \subset \mathbb{R}$ ist $x \in \mathbb{R}$ eine <u>obere Schranke</u>, falls $\forall w \in M : w \leq x$



$s \in \mathbb{R}$ heißt <u>Supremum</u> von M, wenn s die <u>kleinste obere Schranke</u> ist.

Bspl.: $M = [a,b]$, b ist Supremum von M
aber $b \in M$, also b auch Max. von M

$M = [a,b[$, b Supremum, aber <u>nicht</u> Max. von M!

Analog: – untere Schranke

$s \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, wenn s größte untere Schranke von M ist.

Satz 2.7: Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt, dann ist sie konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right)$$

→ So eine Folge kennen wir aus der Anwendungsvorlesung, A2 !

Beispiel 2.8: $a_n := \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$, $p>0$ (gilt auch für $p<0$ und sogar $p \in \mathbb{C}$!)

Kann zeigen: (a_n) streng monoton wachsend und nach oben beschränkt.

Satz 2.7 $\Rightarrow$ (a_n) konvergent

Der Grenzwert ist für $p=1$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

und entsprechend

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p}$$

[Geometrische Folge in der 2ten Anwendungsvorlesung]

Toll bei beschr. Folgen:

$$a_n := (-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

ist sicher divergent, aber die Teilfolgen

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1, 1, 1, \ldots$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, -1, -1, \ldots$$

sind sicher konvergent!

<u>Satz 2.9</u> (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen heißen <u>Häufungspunkte</u>.

Satz 2.9 $\Longleftrightarrow$ Jede beschränkte Folge besitzt einen HP.

<u>Unterschied Grenzwert – HP</u>:

Außerhalb einer ε-Umgebung eines Grenzwerts liegen nur endlich viele Folgenglieder.

Ist das auch so bei einem HP, dann ist der HP der Grenzwert der Folge.

2.2 (Unendliche) Reihen

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist definiert als die Folge ihrer Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Ist die Folge (s_n) konvergent, dann schreibt man

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und s heißt der Wert der Reihe.

Beispiele 2.10:

(i) Die geometrische Reihe $\longrightarrow$ Anwendungsvorlesung

(ii) Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent!

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\substack{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\substack{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ = \frac{1}{2}}} + \quad \text{usw.}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

A3 | Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \quad , q \in \mathbb{R}$$

heißt geom. Reihe.

Berechne Partialsummen:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$

$$q \cdot S_n \quad = \quad q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$$

$$S_n - q \cdot S_n \quad = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$\Rightarrow$ es muß $|q| < 1$ gelten, sonst $q^{n+1} \to \pm\infty \ (n \to \infty)$.

Für $|q| < 1$ folgt:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

A4 | Die geometrische Folge

$a_n := q^n \; , n \in \mathbb{N}$ heißt geom. Folge, $q \in \mathbb{R}$.

- $q > 1$: (q^n) ist monoton wachsend (klar)

  Hoffnung: nach oben beschränkt? $\longrightarrow$ sicher nicht!

  $$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} q^n = +\infty.$$

- $q=1$ klar: $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$
- $0<q<1$: Wir brauchen die Bernoulli'sche Ungleichung (Jakob Bernoulli (1654–1705))

$$\boxed{\forall x \geq -1 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1+nx}$$

Gleichheit gilt nur für $n=1$ oder $x=0$.
(Beweis mit vollst. Ind.)

$$0 < q^n = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\right)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{q}-1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

- $-1<q\leq 0$: Wegen $|q^n| = |q|^n$ folgt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
- $q=-1$: (q^n) beschränkt, aber divergent
- $q<-1$: (q^n) divergent

A5 Alternierende Reihen

Es gilt das Leibniz'sche Kriterium.
Alt. Reihen sind Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k \geq 0$$

Leibniz: Ist die Folge (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, dann sind alt. Reihen konvergent