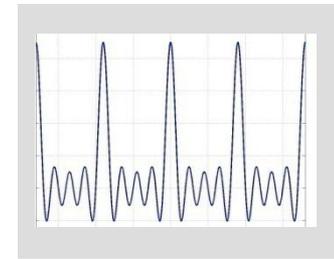
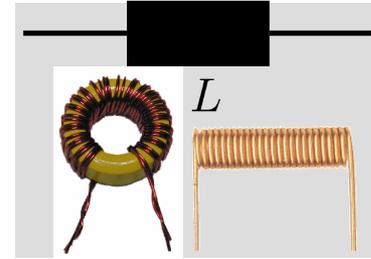
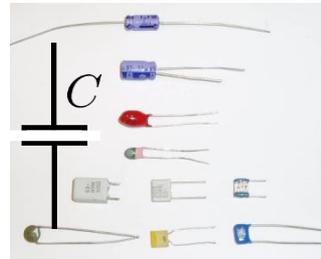
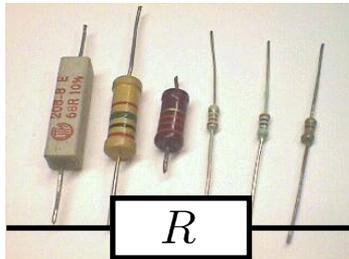




Technische
Universität
Braunschweig



EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTROTECHNIK

(für die Medienwissenschaften/Bachelor)

ELEKTROTECHNISCHE GRUNDLAGEN DER TECHNISCHEN INFORMATIK

(für die Informatik/Bachelor)

Sommersemester 2025

Prof. T. Fingscheidt

Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
Technische Universität Braunschweig

Nähern wir uns langsam der Technik...

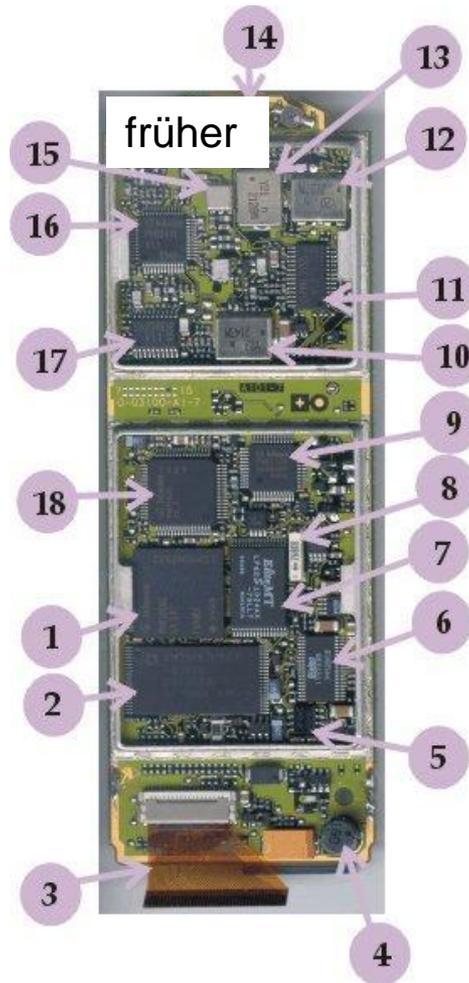
Zoom in ein Mobiltelefon... (I)



- 1 Schale
- 2 Display
- 3 Tastenfeld
- 4 Sensitives Feld
- 5 Akku-Abdeckung
- 6 Platine
- 7 Diktier- und Lautstärke-Taste
- 8 Akku
- 9 SIM-Kartenhalter
- 10 Abschirmungen
- 11 Vibrationsalarm
- 12 Schrauben (4)

Nähern wir uns langsam der Technik...

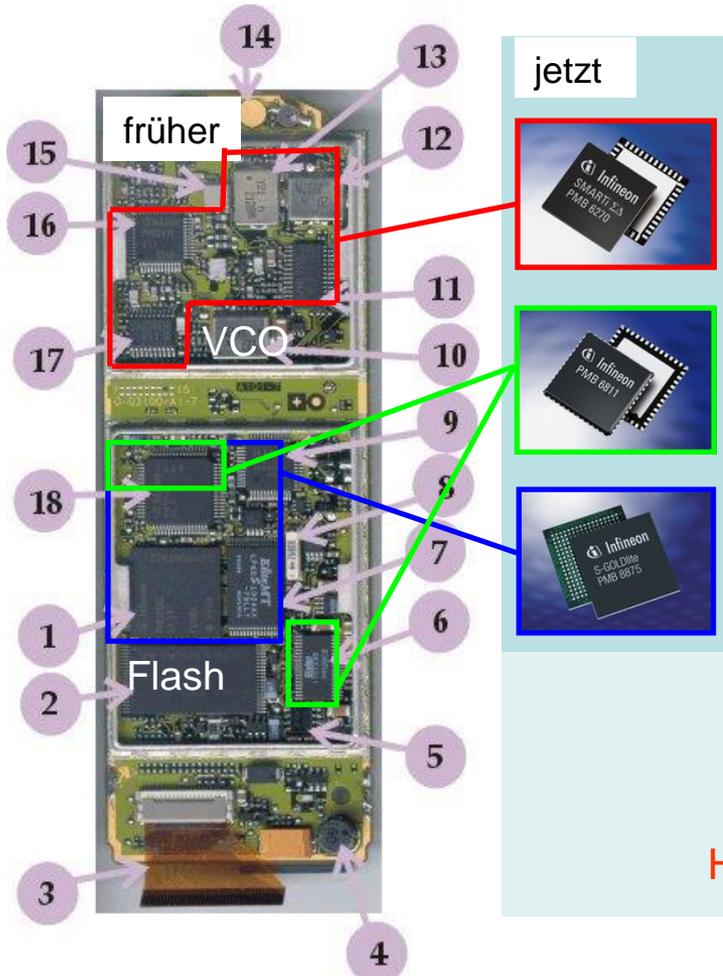
Zoom in ein Mobiltelefon... (II)



- 1 - GSM Baseband Controller (Übertragungstechnik)
- 2 - Flash Memory (Speicher)
- 6 - Spannungsversorgungs-IC
- 7 - SRAM (Speicher)
- 8 - Quarz
- 9 - Sprachcodierung = Kompression (Audio: ~MP3)
- 10-17 Oszillatoren, I/Q-Modulator, Hochfrequenztechnik, ...
- 18 - Analoges Interface-IC zur Digitalen Domäne (I/Q, Ladekontrolle)

Nähern wir uns langsam der Technik...

Zoom in ein (immer noch altes) Mobiltelefon... (III)



Immer höhere Level der Integration "alles" in 3 Chips:

GSM/UMTS Transceiver:

GSM850/900/1800/1900, Direct Conversion RX, Modulator, HF-Oszillatoren, ...

Akku- und Leistungsmanagement-IC: Akkulader, Standby-Steuerung anderer ICs, Vibra-Treiber, Audioverstärker (Freisprechen, Klingelton)

GSM/UMTS Basisband-Controller:

Digitaler Signalprozessor (DSP):

Entzerrung, Kanal- und Sprachcodierung, Sprach und Audiosignalverarbeitung, ...

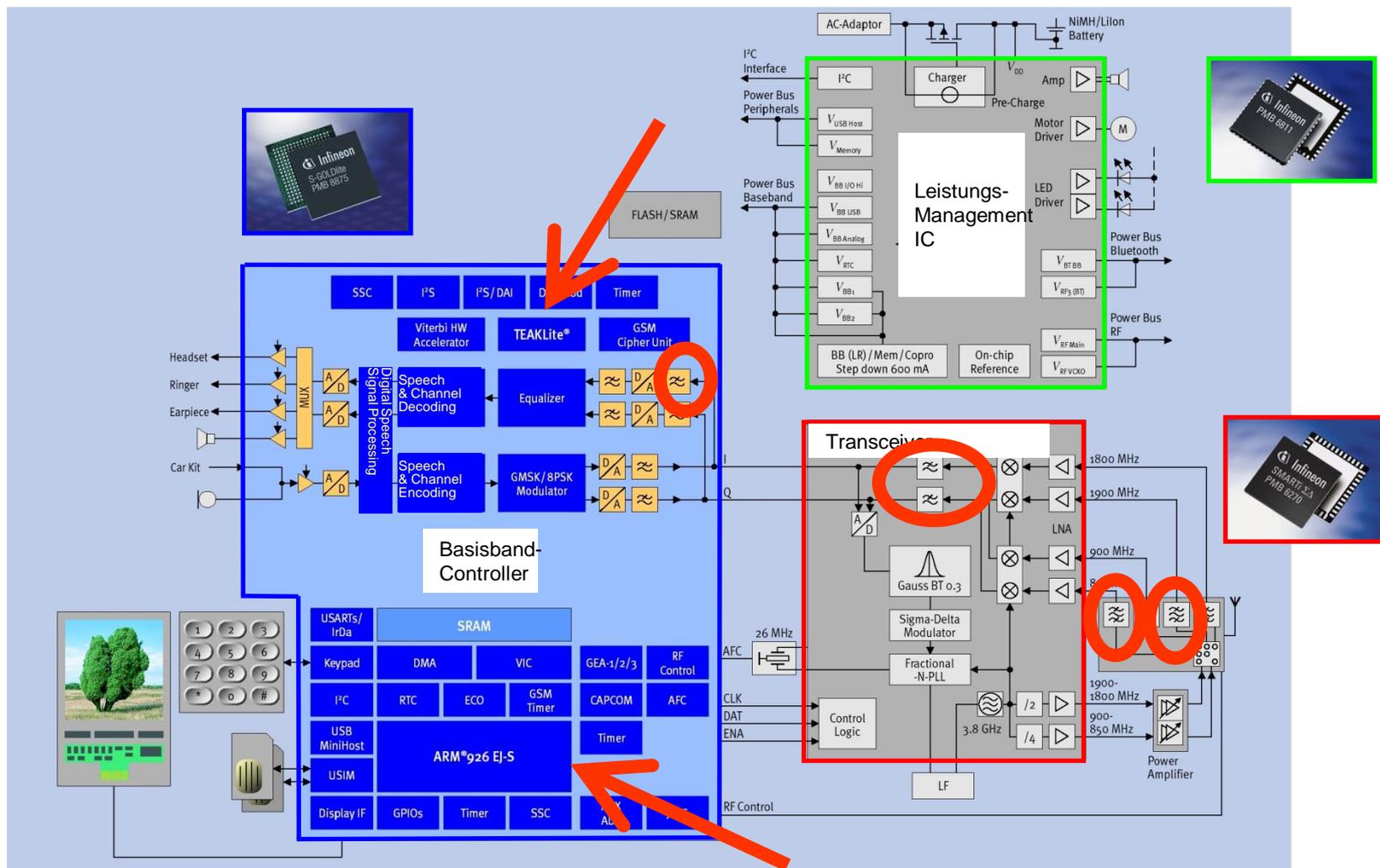
Microcontroller (μ C):

Multimedia-Applikationen, ...

Hier findet die Multimedia-(Signal-)Verarbeitung statt!

Nähern wir uns langsam der Technik...

Zoom in ein Mobiltelefon... (IV)



Natürlich: Da ist manches trockene Brot dabei

Aber: Wenn Sie an die Spitze der Entwicklung wolle müssen Sie da durch...



Es gibt noch was zu tun!

Viele Kommilitoninnen und Kommilitonen haben es schon geschafft!



Organisatorisches

Vorlesung und Übung:

2 SWS Vorlesung und 1 SWS Übung (im Stud.IP unter dem Reiter „Meetings“)

Vorlesung immer Montags um 15:00 -16:30 Uhr

Übung 14-tägig Dienstags um 15:00 -16:30 Uhr (Terminankündigung in VL)

Begleitendes Material zum Download im Stud.IP!

13 VL-Termine und 7 Ü-Termine: Siehe IfN-Webseite / Stud.IP!

<https://www.tu-braunschweig.de/ifn/edu/ss/et-mewi/> (Medienwissenschaften)

<https://www.tu-braunschweig.de/ifn/edu/ss/gti> (Informatik)

Schriftliche Prüfung: _____ (Räume unter Vorbehalt)

Übungen und Betreuung der Vorlesung: Malte Stelzer, M.Sc.

Tel.: 0531/391-2454, E-Mail: malte.stelzer@tu-braunschweig.de

Homepage: <https://www.tu-braunschweig.de/ifn/institut/abt/sv/stelzer>

Manfred Albach

Grundlagen der Elektrotechnik I und II

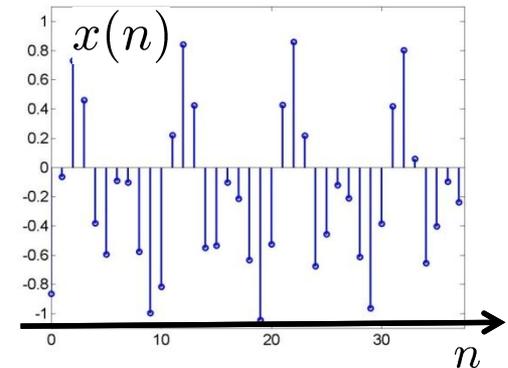
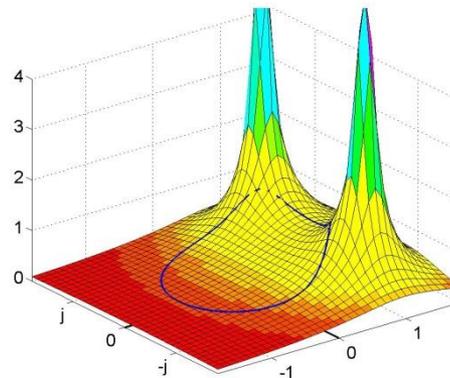
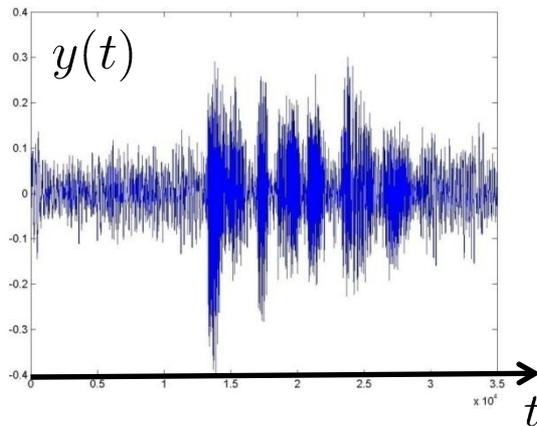
Pearson Studium

ISBN: 3-8273-7106-6 bzw. 3-8273-7108-2

Preis: jeweils € 29,95

Informatik Nebenfach Signalverarbeitung

„DIGITALE SIGNALVERARBEITUNG“



Sommersemester 2025

Herzlich willkommen!

Dies wird dann wiederum die Grundlage für die

„Sprachkommunikation“ und ist sehr hilfreich für die „Mustererkennung“

1. Einführung

Größen und Einheiten, Basisgrößen, abgeleitete Größen

2. Grundbegriffe der Elektrotechnik

Elektrischer Stromkreis, Spannungs- und Stromquellen, Kirchhoff'sche Sätze

3. Analyse linearer Netzwerke

Superpositionsprinzip, Methode der Ersatzquelle, Maschenstromverfahren

4. Kapazität und Induktivität

Kondensator, Spule, Wechselströme

5. Die komplexe Wechselstromrechnung

Wechselströme, Tutorial: komplexe Zahlen, komplexe Berechnung von Netzwerken, Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

6. Signale und Systeme: Die Fourier-Transformation

7. Signale und Systeme: Die Laplace-Transformation

Einschaltvorgänge, Laplace-Ersatzschaltbild, Anwendungen

1. Einführung

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

1.2 Abgeleitete Größen



1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Physikalische Größen werden relativ zu einer Maßeinheit gemessen und angegeben.

Eine *physikalische Größe* a ist ein Produkt aus *Zahlenwert* $\{a\}$ und *Einheit* $[a]$

$$a = \{a\} \cdot [a] \quad \text{z.B. } v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Physikalische Gleichungen werden so formuliert, dass sie für beliebige Einheiten gültig sind.

Größen können in beliebiger Weise multipliziert (dividiert) werden. Bei der Addition (Subtraktion) von Größen müssen alle Summanden gleiche Einheiten aufweisen.

Aufgrund der physikalischen Gesetze bestehen Abhängigkeiten zwischen den Einheiten.

Nicht alle Größen sind ableitbar. Die Wahl der Grundgrößen bestimmt das Maßsystem (oder Einheitensystem).

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Die Basisgrößen des SI-Systems und ihre Kurzzeichen

Im internationalen Maßsystem (Système International, SI-System) sind sieben Basiseinheiten definiert, aus den alle anderen Einheiten abgeleitet werden:

Basisgröße	Basiseinheit	Kurzzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

} MKSA-System

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Dezimale Vielfache und Teile

Vorsatz	Vorsatzzeichen	Bedeutung	Vorsatz	Vorsatzzeichen	Bedeutung
Yotta	Y	10^{24}	Dezi	d	10^{-1}
Zetta	Z	10^{21}	Zenti	c	10^{-2}
Exa	E	10^{18}	Milli	m	10^{-3}
Peta	P	10^{15}	Mikro	μ	10^{-6}
Tera	T	10^{12}	Nano	n	10^{-9}
Giga	G	10^9	Piko	p	10^{-12}
Mega	M	10^6	Femto	f	10^{-15}
Kilo	k	10^3	Atto	a	10^{-18}
Hekto	h	10^2	Zepto	z	10^{-21}
Deka	da	10^1	Yocto	y	10^{-24}

Beispiel: $v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 13.89 \text{ m/s}$

Größe = Zahlenwert · Einheit

1.2 Abgeleitete Größen und Einheiten

Geschwindigkeit (Weg pro Zeiteinheit):

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{l} \quad ; \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

time
length
velocity

Beschleunigung (Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit):

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} \quad ; \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

acceleration

Massenträgheitskraft (Masse x Beschleunigung):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad [F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{Newton})$$

mass
Force

Arbeit (Kraft x Strecke): (= Energie)

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} \quad ; \quad [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{Joule})$$

Work

Leistung (Arbeit pro Zeiteinheit):

$$P = \frac{W}{\Delta t} \quad ; \quad [P] = \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{1W} \quad (\text{Watt})$$

Power

Frequenz (i Schwingungen pro Zeiteinheit Δt oder Kehrwert der Periodendauer T):

$$f = \frac{i}{\Delta t} = \frac{1}{T} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \quad (\text{Hertz})$$

frequency

1.2 Abgeleitete Größen und Einheiten

Die Dimension einer Größe, Dimensionsanalyse

Zwei physikalische Größen haben die gleiche Dimension, wenn sie in ein und derselben Maßeinheit gemessen werden können.

Zwei physikalische Größen haben verschiedene Dimensionen, wenn sich die zugehörigen Maßeinheiten nicht in die jeweils andere umrechnen lässt.

Die Dimensionsanalyse ist ein Hilfsmittel zur Kontrolle physikalischer Rechnungen.

Die Dimension einer Größe a wird mit $\dim(a)$ angegeben.

Größe	Dimension
l	Länge
t	Zeit
v	Geschwindigkeit
F	Kraft
W	Arbeit
q	Ladung

Beispiel der **Dimensions- bzw. Einheitenanalyse**:
Massenträgheitskraft (Masse x Beschleunigung):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad [\vec{F}] = \text{N} = \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{s}^2} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Abgeleitete Einheiten (hier Newton) werden in Basiseinheiten (hier MKSA) geschrieben

$$\Rightarrow [\vec{F}] = [m] \cdot [\vec{a}] \quad \checkmark$$

2. GRUNDBEGRIFFE DER ELEKTROTECHNIK

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

- 2.1 Der elektrische Stromkreis
- 2.2 Spannungs- und Stromquellen
- 2.3 Arbeit und Leistung
- 2.4 Die Kirchhoff'schen Sätze
- 2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze



2.1 Der elektrische Stromkreis

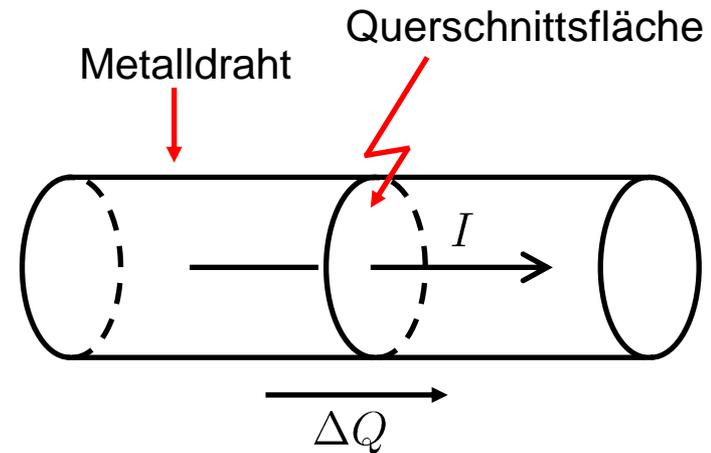
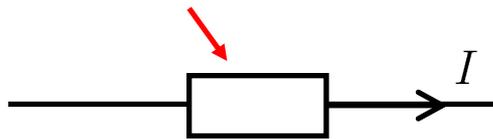
Die elektrische Stromstärke

Eine gerichtete Strömung von elektrischen Ladungsträgern wird als elektrischer Strom bezeichnet, dessen Stärke in Ampere A (SI-Einheit) gemessen wird.

Einheit

Betrachtet wird z.B. ein Stück metallischer Draht:

Symbol für den Metalldraht:



Die mittlere *elektrische Stromstärke* I wird als die pro Zeitintervall Δt durch eine Querschnittsfläche strömende Ladungsmenge ΔQ definiert:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

;

$$\underbrace{\Delta Q = I \cdot \Delta t}_{\text{Größen}}$$

$$\underbrace{[Q] = \text{As} \quad [I] = \frac{\text{As}}{\text{s}} = \text{A}}_{\text{Einheiten}}$$

2.1 Der elektrische Stromkreis

Erzeuger und Verbraucher

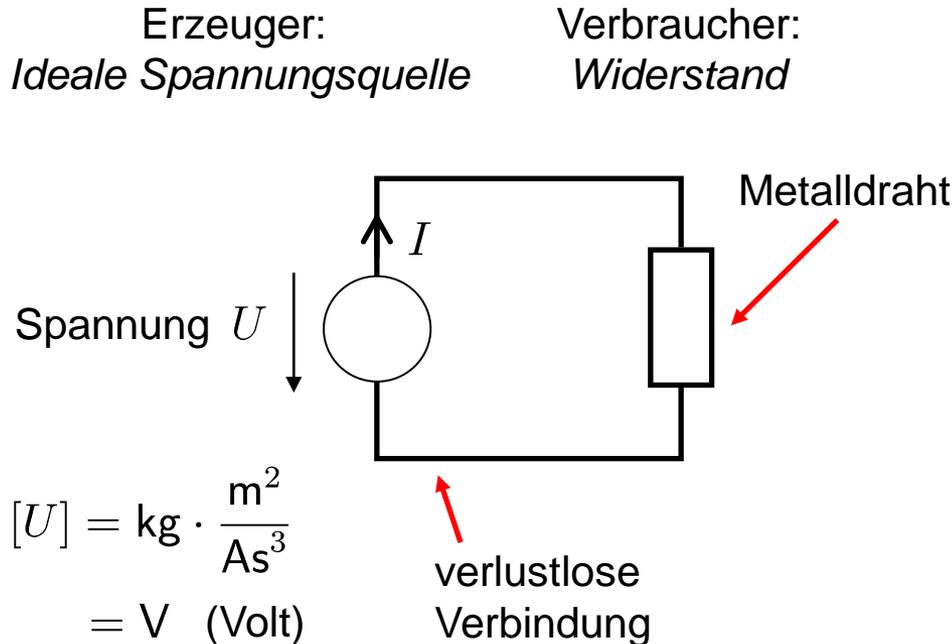
Einteilung der Elemente des Stromkreises in

Erzeuger.

... stellen elektrische Energie bereit

Verbraucher.

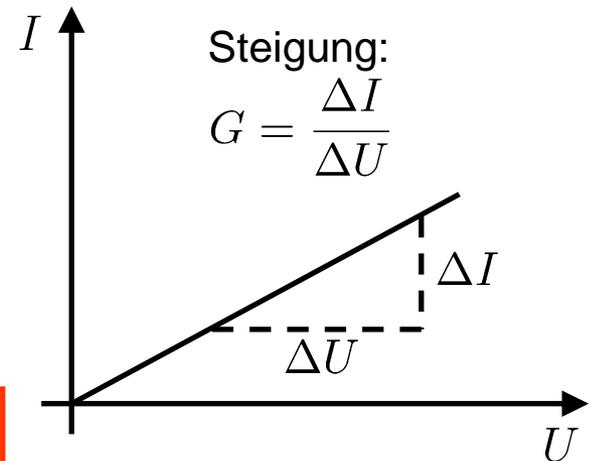
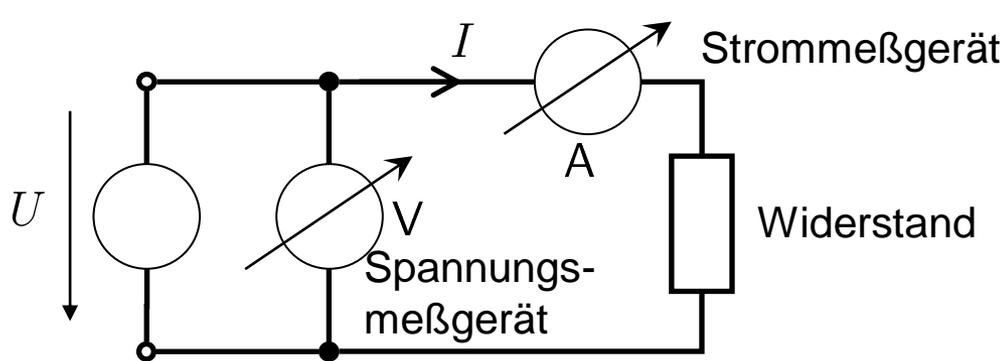
... wandeln elektrische Energie in andere Energieformen um (z.B. Wärme, Licht, Schall, ...)



Die Erfahrung lehrt, dass die Stromstärke I der anliegenden Spannung U in vielen Fällen proportional ist.

2.1 Der elektrische Stromkreis

Strom und Spannung im Stromkreis



Es gilt: $I \sim U$ bzw. $I = G \cdot U$ oder $U = \frac{1}{G} I = R \cdot I$

Die Proportionalitätskonstanten werden als:

Leitwert G mit $[G] = \left[\frac{I}{U} \right] = \frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{S}$ (Siemens)

Widerstand R mit $[R] = \left[\frac{U}{I} \right] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$ (Ohm)

bezeichnet.

gebräuchlicher!

2.1 Der elektrische Stromkreis

Das Ohmsche Gesetz

Ein elektrischer Widerstand, für den die Beziehung

$$U = R \cdot I$$

exakt gilt, wird als *Ohmscher Widerstand* bezeichnet.

Die Proportionalität von Stromstärke I und Spannung U wird als Ohmsches Gesetz bezeichnet.

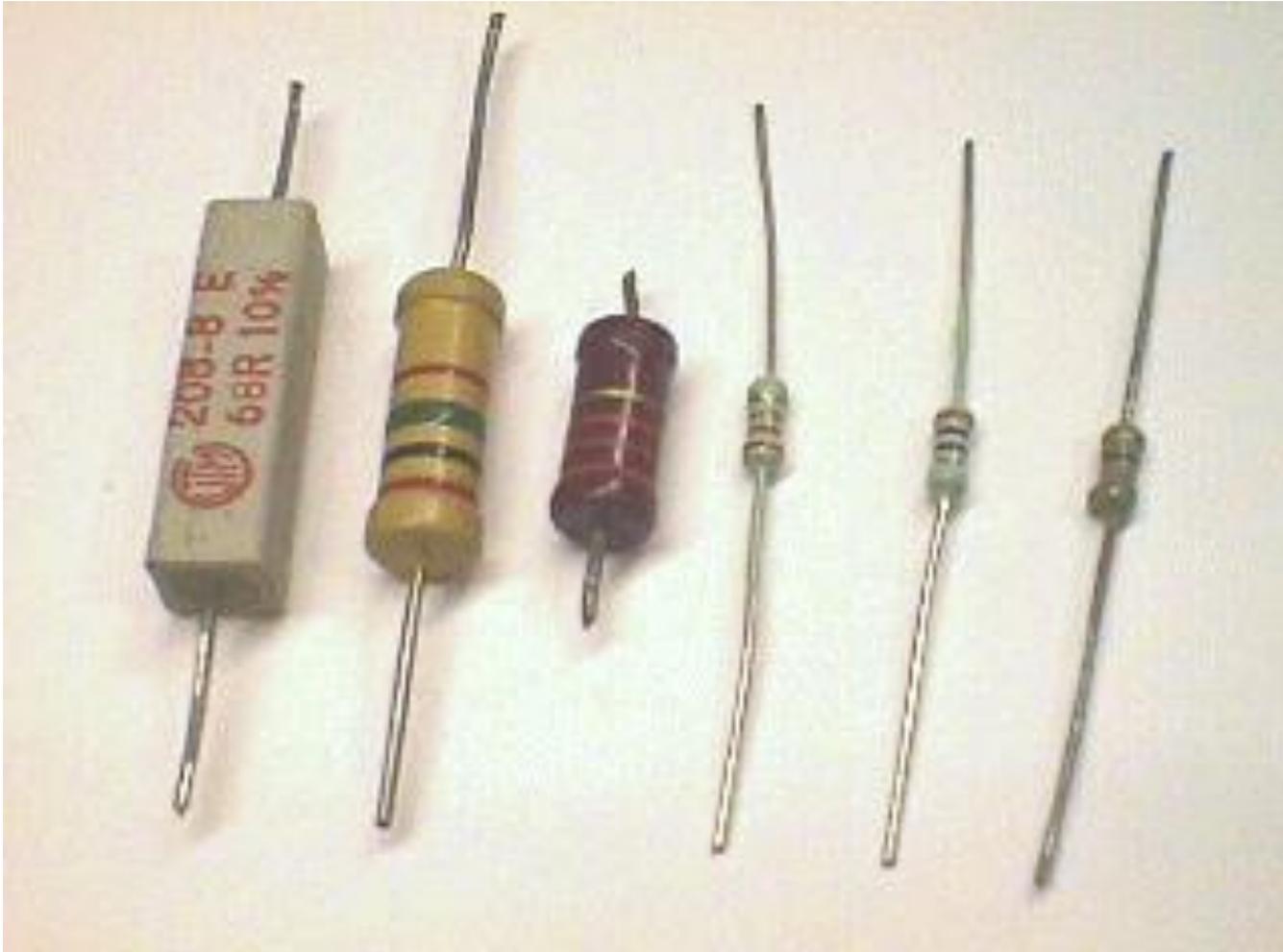
An einem Ohmschen Widerstand R fällt eine dem Strom I proportionale Spannung U ab.

Die Spannung U wird daher auch als *Spannungsabfall* an dem Verbraucher R bezeichnet.

Reale Widerstände weisen in der Regel ein nicht exakt lineares Verhalten auf. Der Ohmsche Widerstand ist also eine Modellvorstellung. Z.B. kann der Widerstand von der Temperatur abhängen.

2.1 Der elektrische Stromkreis

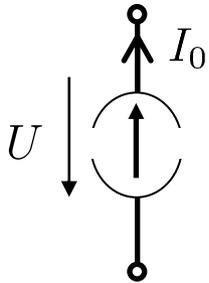
So sehen reale Widerstände aus



2.2 Spannungs- und Stromquellen

Ideale Quellen

Ideale Stromquelle:

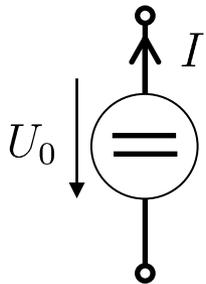


Die ideale Stromquelle erzeugt einen Strom $I_0 = \text{konst.}$ *unabhängig* von der an der Quelle anliegenden Spannung.

Die Quelle kann den Strom gegen jeden noch so großen Widerstand treiben.

Der *innere Widerstand* der idealen Stromquelle ist *unendlich groß*.

Ideale Spannungsquelle:



Die ideale Spannungsquelle erzeugt die Spannung $U_0 = \text{konst.}$ *unabhängig* von dem durch die Quelle fließenden Strom.

Die ideale Spannungsquelle kann die Spannung bei beliebig kleinem Parallelwiderstand aufrecht erhalten.

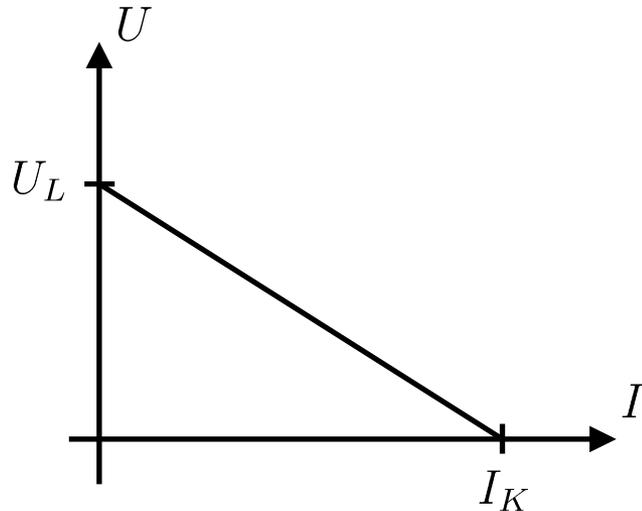
Der *innere Widerstand* der idealen Spannungsquelle ist *Null*.

Gleichspannungsquelle

2.2 Spannungs- und Stromquellen

Reale Quellen

In der Realität hängen Strom und Spannung an einer Quelle voneinander ab.
Diese Abhängigkeit wird durch eine lineare Kennlinie angenähert.



$$U = f(I) = U_L - \frac{U_L}{I_K} \cdot I$$

oder

$$I = f(U) = I_K - \frac{I_K}{U_L} \cdot U$$

Dabei ergibt der Betrag der Steigung einen sog. **Innenwiderstand der Quelle**:

$$R_i = \frac{U_L}{I_K} = \frac{1}{G_i}$$

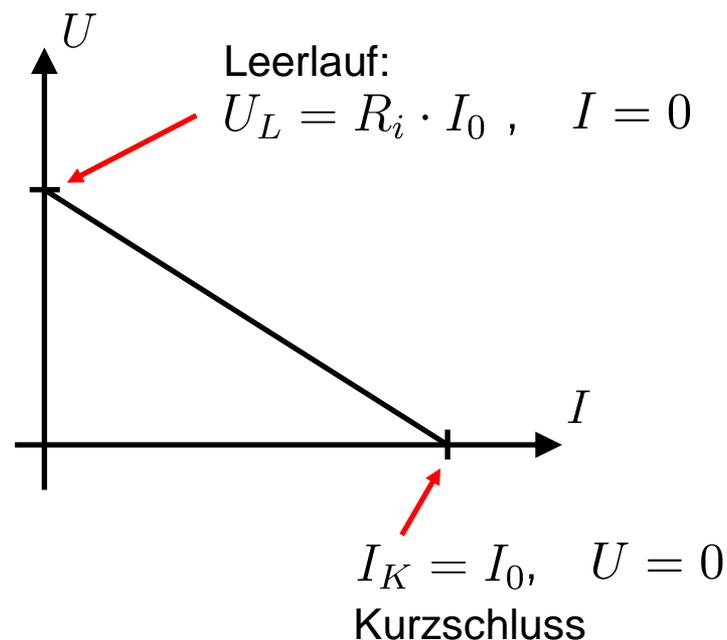
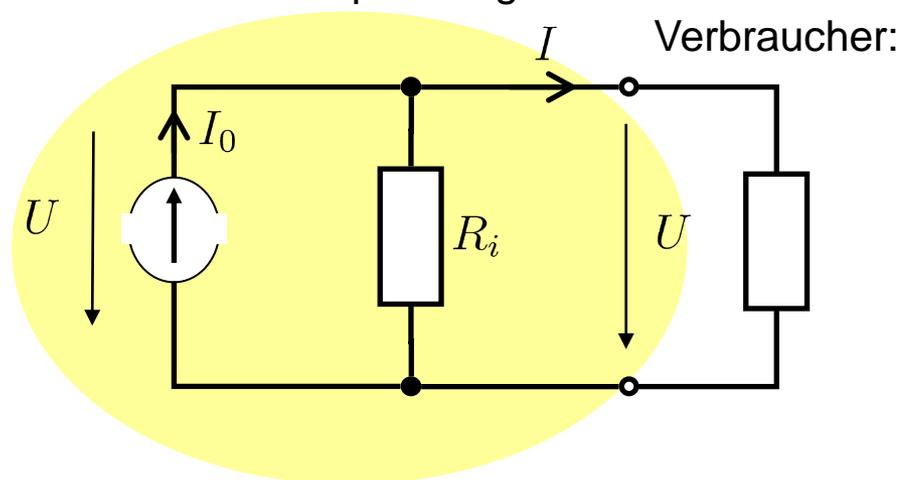
$I = 0$ (Leerlauf): $U = U_L$ Leerlaufspannung

$U = 0$ (Kurzschluss): $I = I_K$ Kurzschlussstrom

2.2 Spannungs- und Stromquellen

Die Ersatzstromquelle

Die **Ersatzstromquelle** modelliert eine reale Stromquelle in ihrer Abhängigkeit von Strom und Spannung:



R_i innerer Widerstand der Quelle

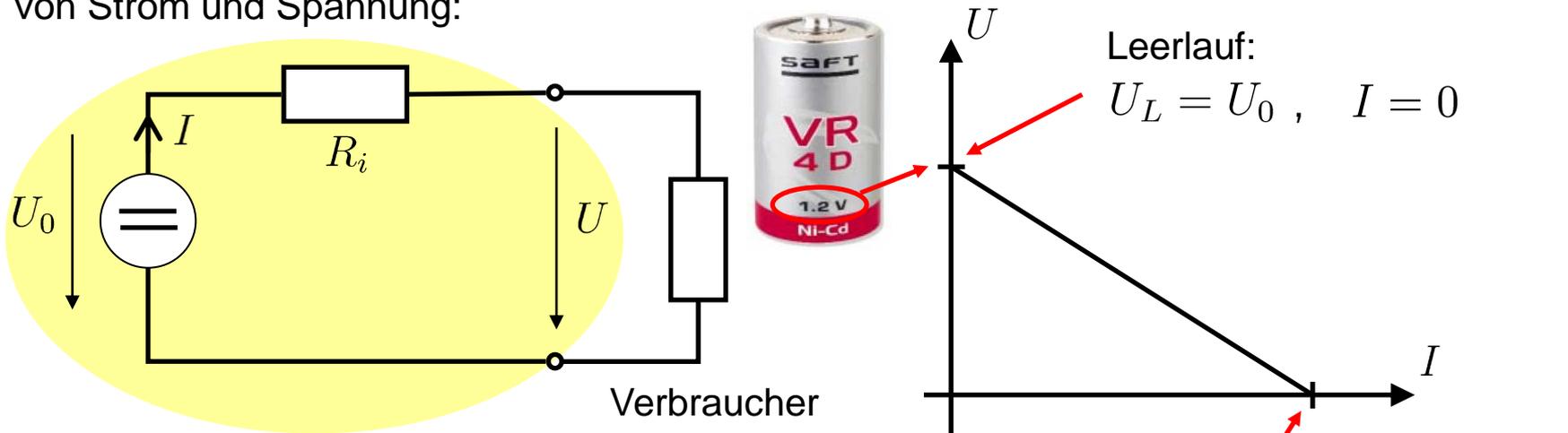
$I_K = I_0$ Kurzschlussstrom der Quelle

$U_L = R_i \cdot I_0$ Leerlaufspannung der Quelle

2.2 Spannungs- und Stromquellen

Die Ersatzspannungsquelle

Die **Ersatzspannungsquelle** modelliert eine reale Spannungsquelle in ihrer Abhängigkeit von Strom und Spannung:



R_i innerer Widerstand der Quelle

$U_L = U_0$ Leerlaufspannung der Quelle

$I_K = \frac{U_0}{R_i}$ Kurzschlussstrom der Quelle

2.2 Spannungs- und Stromquellen

Umwandlung von Quellen

Die Ersatzspannungsquelle und die Ersatzstromquelle können in den jeweils anderen Quellentyp umgewandelt werden:

	Ersatzspannungsquelle	Ersatzstromquelle
Kennwerte:	$\{R_i, U_0\}$	$\{R_i, I_0\}$
Gesucht:	$U_0 = U_L = R_i \cdot I_0$	$I_0 = I_K = \frac{U_0}{R_i}$
	R_i	R_i

2.3 Arbeit und Leistung

Die Quellenspannung U eines Stromerzeugers treibt eine Ladungsmenge ΔQ durch den Stromkreis.

Dabei wird eine Arbeit W geleistet, die der Ladungsmenge proportional ist. Es gilt:

$$W = \Delta Q \cdot U = I \cdot \Delta t \cdot U \quad ; \quad [W] = [U][I][t] = \text{VAs} = \text{Ws} = \text{J}$$

Watt
Joule

Die Leistung (Arbeit pro Zeitintervall) ergibt sich somit zu

$$P = \frac{W}{\Delta t} = U \cdot I \quad [P] = [U][I] = \text{VA} = \text{W}$$

Für den Ohmschen Widerstand gilt:

(quadratische Abhängigkeit der Leistung von Strom oder Spannung):

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Beispiel: $R = 20 \, \Omega$, $I = 10\text{A}$ $\Rightarrow P = 2000\text{W} = 2\text{kW}$ \rightarrow Wärme

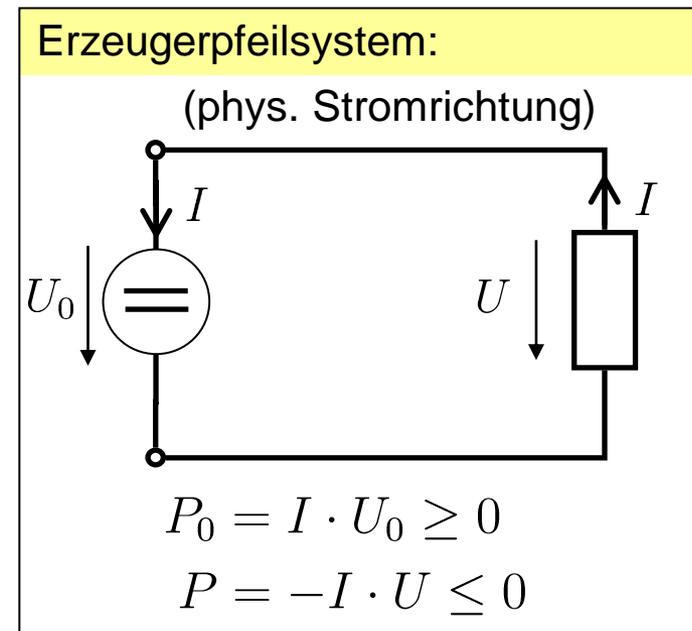
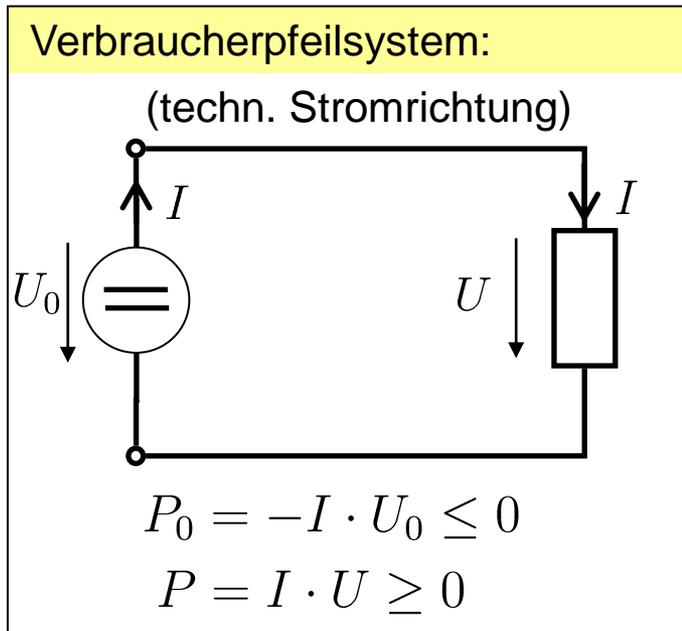
2.4 Die Kirchhoff'schen Sätze

Zählpeilsysteme

Ströme und Spannungen werden in Richtung des Zählpeils positiv gerechnet.

Positive Zählrichtung von Strom und Spannung können willkürlich vorgegeben werden.

Leistungen werden positiv gezählt, wenn Strom- und Spannungspfeil in die gleiche Richtung weisen.



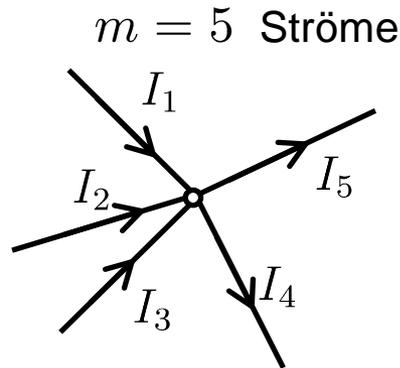
Üblicherweise wird das Verbraucherpeilsystem verwendet !

2.4 Die Kirchhoff'schen Sätze

Die Knotengleichung (1. Kirchhoff'scher Satz)

Die Summe der an einem Knoten des Netzwerkes zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Beispiel:



wobei

zufließende Ströme *positiv* und
abfließende Ströme *negativ* gezählt werden.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$
$$\Rightarrow +I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

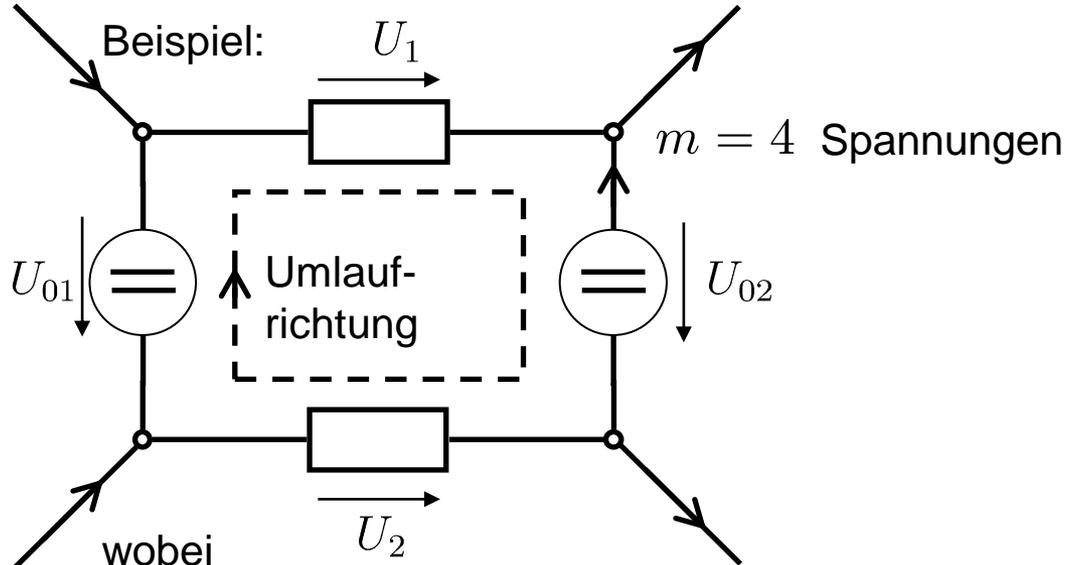
Allgemein gilt:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm I_{\nu}) = 0$$

2.4 Die Kirchhoff'schen Sätze

Die Maschengleichung (2. Kirchhoff'scher Satz)

Die Summe aller Spannungen eines vollständigen Maschenumlaufs muss Null ergeben.



$$+U_1 + U_{02} - U_2 - U_{01} = 0$$

Allgemein gilt:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm U_{\nu}) = 0$$

Spannungen *positiv* gezählt werden, wenn Umlaufrichtung und Zählpfeil *gleichorientiert* sind, und

Spannungen *negativ* gezählt werden, wenn Umlaufrichtung und Zählpfeil *gegensinnig* orientiert sind.

2.4 Die Kirchhoff'schen Sätze

Was wichtig ist ...

Bis zum Ende des Kapitel 3 werden im Prinzip nur Anwendungen der folgenden 3 Sätze behandelt:

1) Ohm'schen Gesetz:

$$U = R \cdot I$$

2) Knotengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm I_{\nu}) = 0$$

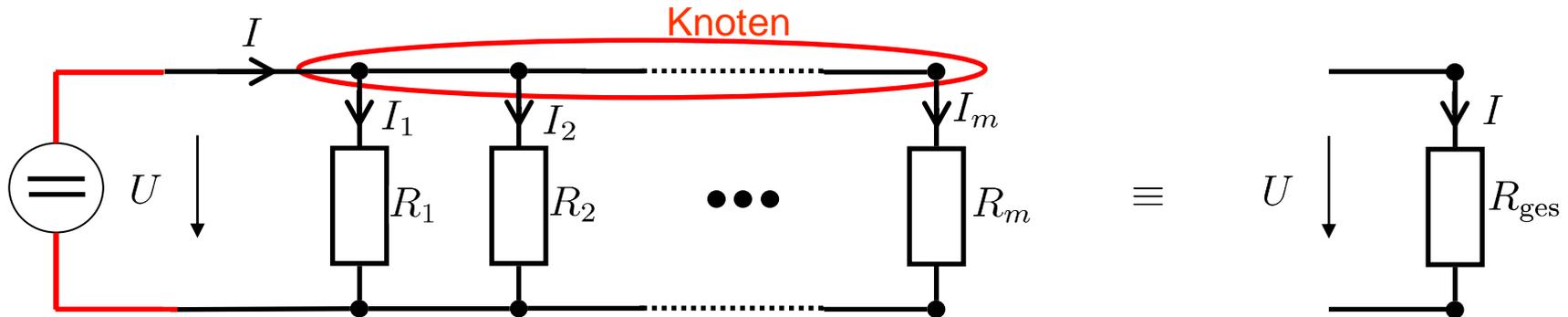
3) Maschengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm U_{\nu}) = 0$$

Es gibt eine Reihe wichtiger abgeleiteter Sätze und Regeln, also aufgepasst...

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Parallelschaltung Ohm'scher Widerstände



Anwendung des 1. Kirchhoffschen Satzes

$$I - I_1 - I_2 - \dots - I_m = 0$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_m = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_m}$$

$$= U \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{R_\nu} = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$$

Parallelschaltung
Ohm'scher
Widerstände:

$$\underline{\underline{\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{R_\nu}}}$$

bzw. $R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{R_\nu}}$

Sonderfall:

2 Widerstände parallel:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

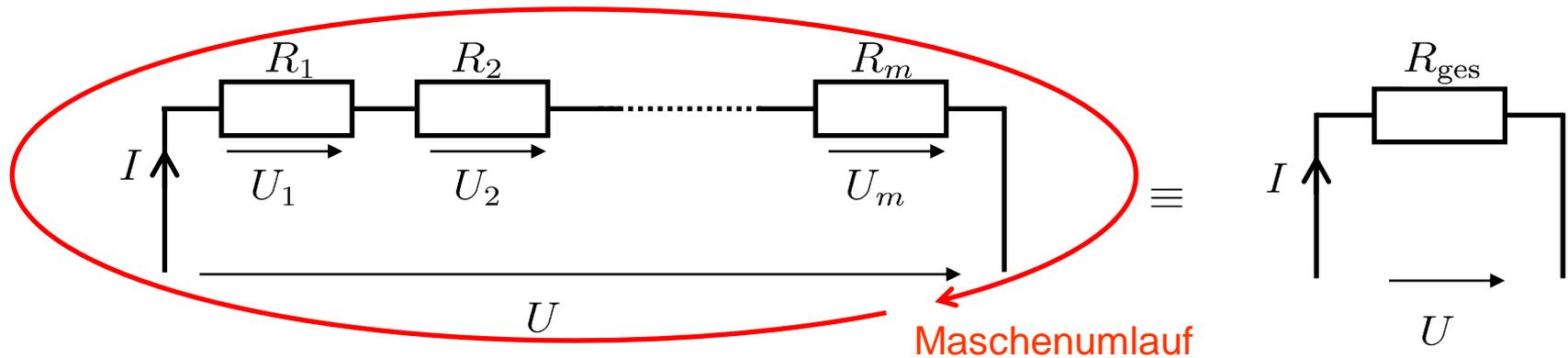
Achtung!

3 Widerstände parallel:

~~$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$~~

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände



Anwendung des 2. Kirchhoffschen Satzes

$$U_1 + U_2 + \dots + U_m - U = 0$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_m = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_m$$

$$= I \sum_{\nu=1}^m R_{\nu}$$

$$= I \cdot R_{\text{ges}}$$

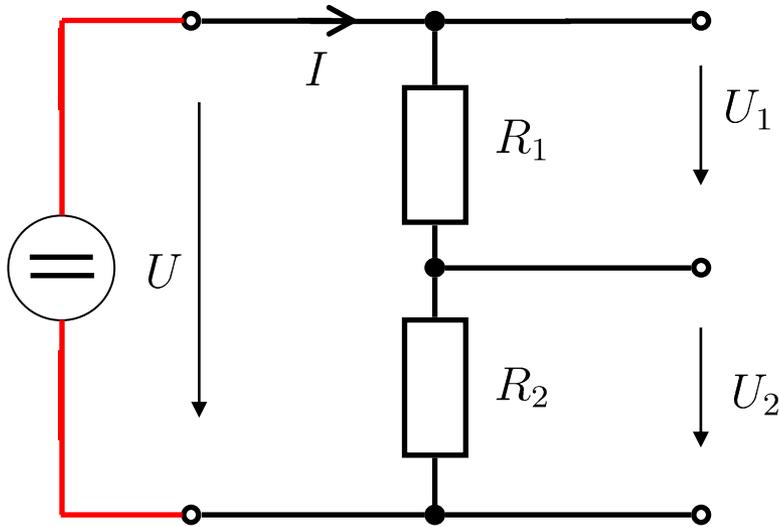
Reihenschaltung

Ohm'scher Widerstände:

$$R_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m R_{\nu}$$

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Der Spannungsteiler



$$\begin{aligned}U &= U_1 + U_2 \\ &= (R_1 + R_2) \cdot I \\ I &= \frac{U_2}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{U_2}{U} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2}\end{aligned}$$

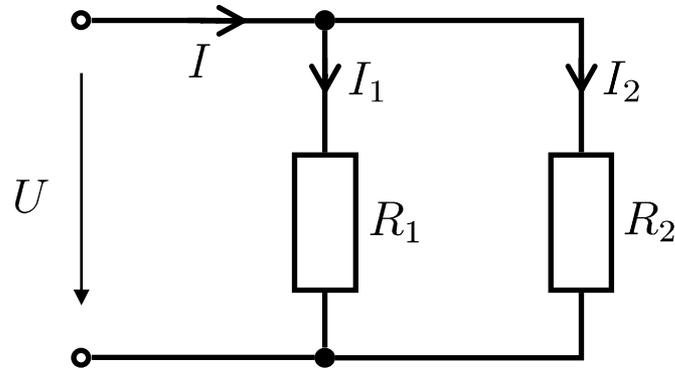
Spannung an einem Widerstand R_μ aus einer **Reihenschaltung** mit Gesamtwiderstand R_{ges} :

Es gilt:
$$\frac{U_\mu}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_\mu}{R_{\text{ges}}}$$

Die Spannungen teilen sich im Verhältnis der Widerstände !

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Der Stromteiler



$$I = I_1 + I_2$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U$$
$$U = \frac{I_1}{\frac{1}{R_1}} = R_1 I_1$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

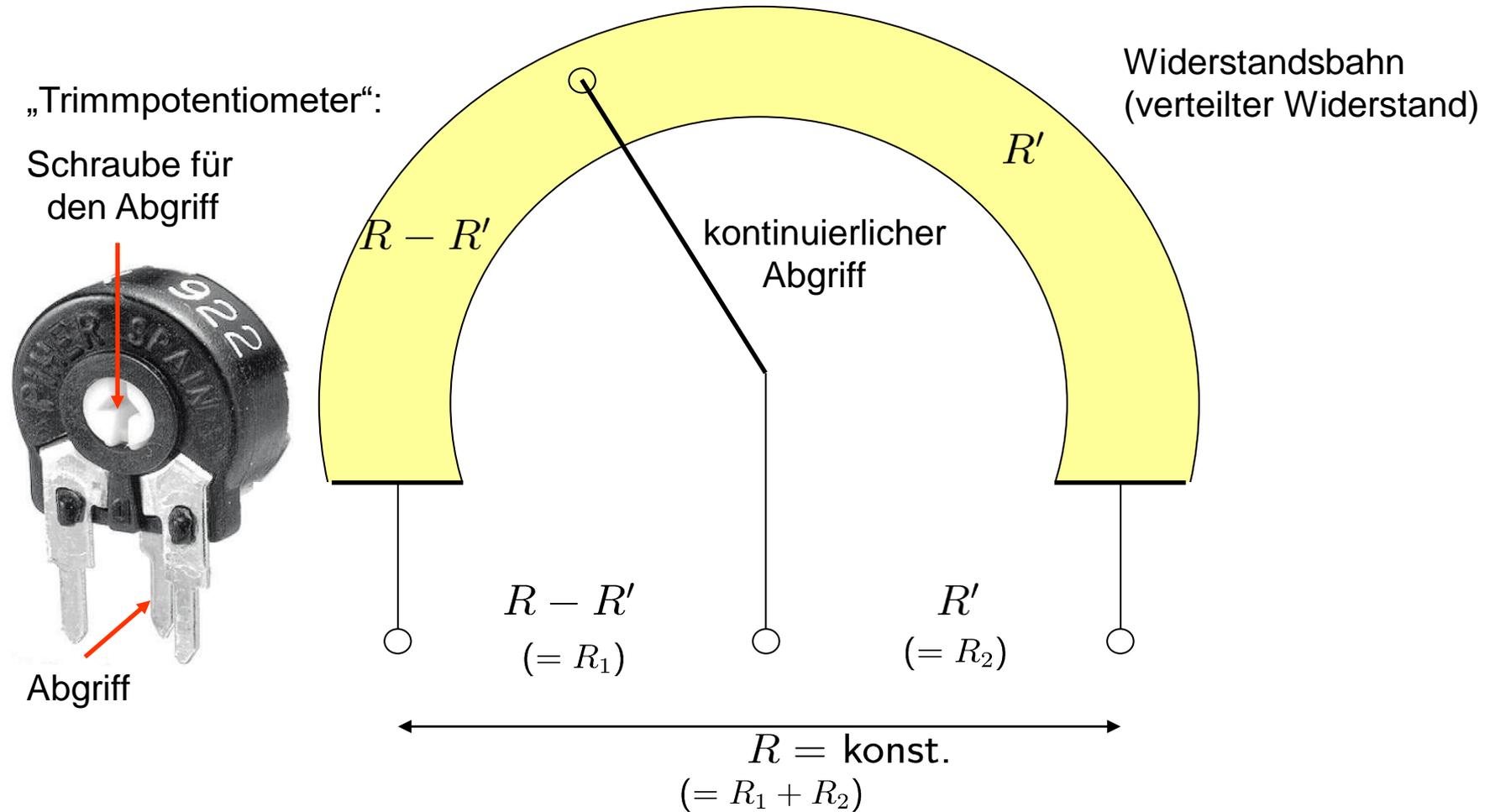
Strom durch einen Widerstand R_μ aus einer **Parallelschaltung** mit Gesamtwiderstand R_{ges} :

$$\text{Es gilt: } \frac{I_\mu}{I_{\text{ges}}} = \frac{\frac{1}{R_\mu}}{\frac{1}{R_{\text{ges}}}} = \frac{G_\mu}{G_{\text{ges}}}$$

Die Ströme teilen sich im Verhältnis der inversen Widerstände (= Leitwerte)!

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Aufbau von Potentiometern



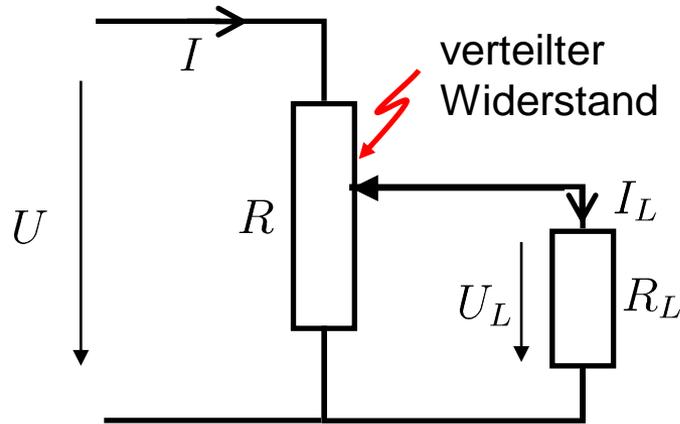
2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Die Potentiometerschaltung

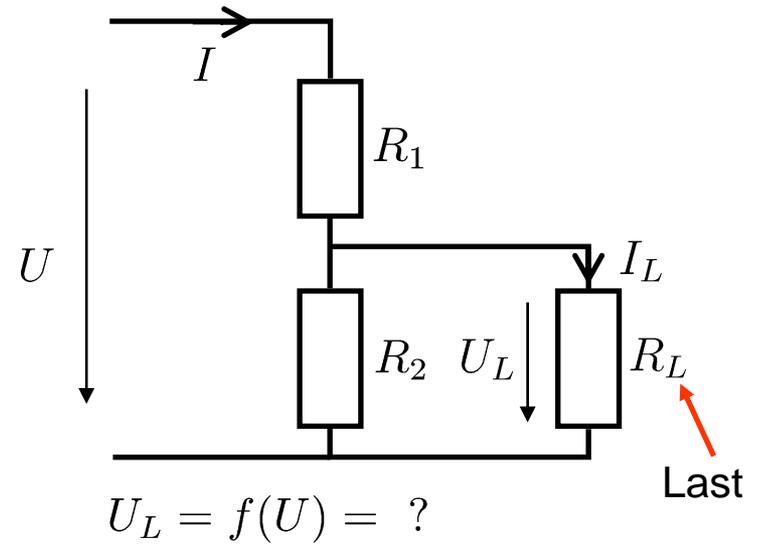


andere Potentiometerbauform

Belasteter Spannungsteiler:



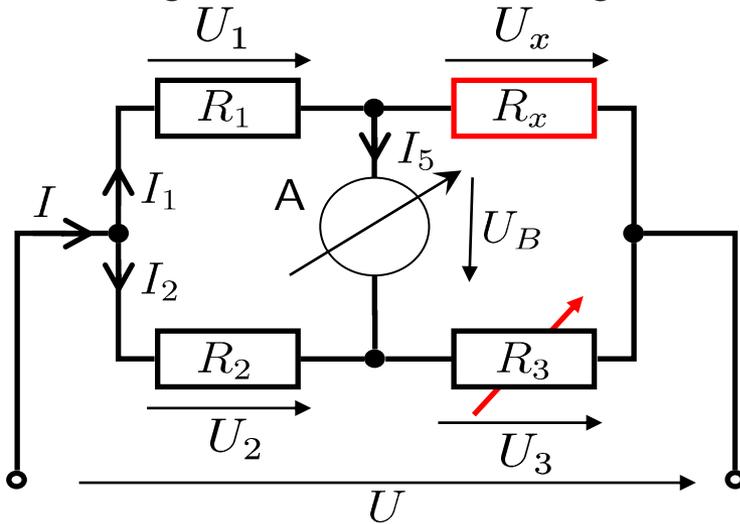
Ersatzschaltung:



2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Die Brückenschaltung

Anwendung der Brückenschaltung: Messung eines Widerstands $R_x = ?$



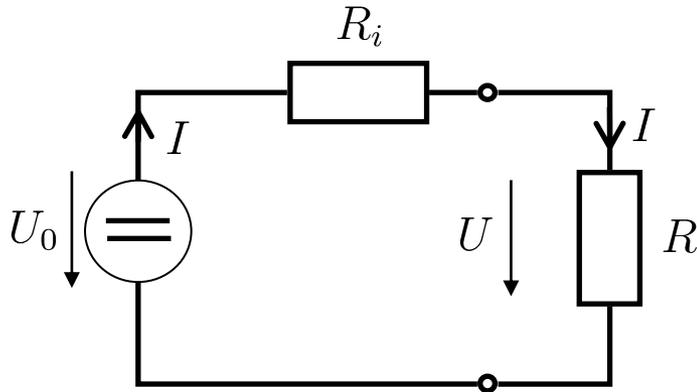
R_1 und R_2 sind bekannt.

R_3 wird so eingestellt, dass durch das Strommessinstrument kein Strom fließt ($I_5 = 0$, genannt: Abgleich).

...

2.5 Anwendungen der Kirchhoff'schen Sätze

Die Leistungsanpassung



Gegeben: Reale Spannungsquelle mit Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i .

Aufgabe: Bestimme den Lastwiderstand R so, dass R die maximale Leistung aufnimmt.

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = R \cdot \frac{U_0^2}{(R + R_i)^2}$$

Maximalwertbestimmung \Rightarrow Ableitung von P nach R :

...

Frage: Wieviel Prozent der gesamten, an den Widerständen R_i und R in Wärme umgesetzten Leistung wird bei Leistungsanpassung im Lastwiderstand R umgesetzt?

3. ANALYSE LINEARER NETZWERKE

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

- 3.1 Einführung
- 3.2 Das Superpositionsprinzip
- 3.3 Die Methode der Ersatzquelle
- 3.4 Das Maschenstromverfahren

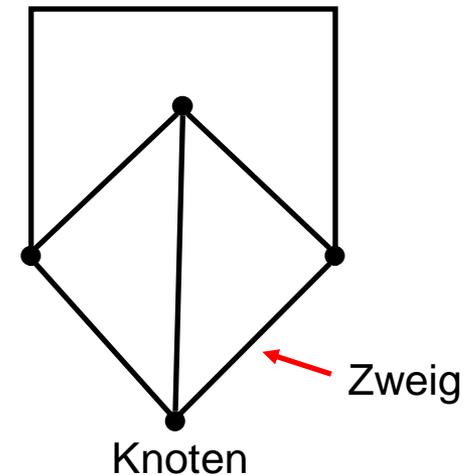
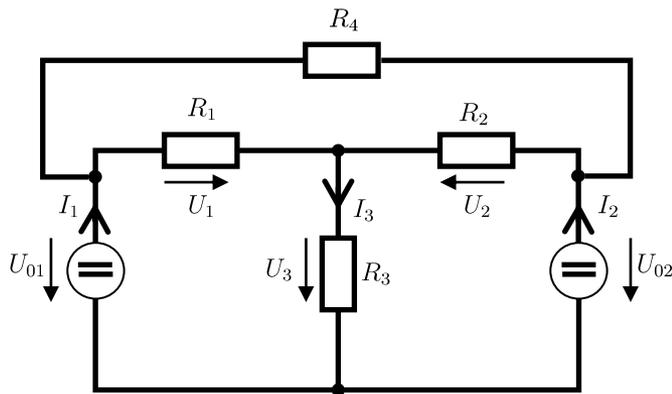
3.1 Einführung

Beschreibung elektrischer Netzwerke durch *konzentrierte* Netzwerkelemente (idealisierte Modelle realer Bauelemente).

Voraussetzung: Zeitlich langsam veränderliche Ströme und Spannungen, kleine Abmessungen der realen, zu modellierenden Netzwerkelemente.

Außerdem werden im folgenden ausschließlich *lineare* Netzwerke behandelt.

Angabe einer Netztopologie mit *Knoten* und *Zweigen* (Zusammenschaltung der Netzwerkelemente).



3.1 Einführung

Linearität

Anmerkung: Eine Funktion $U = f(I)$ heißt **linear**, falls für jedes $I = aI' + bI''$ gilt:

$$U = a \cdot f(I') + b \cdot f(I'')$$

Beispiel für ein lineares Netzwerk:

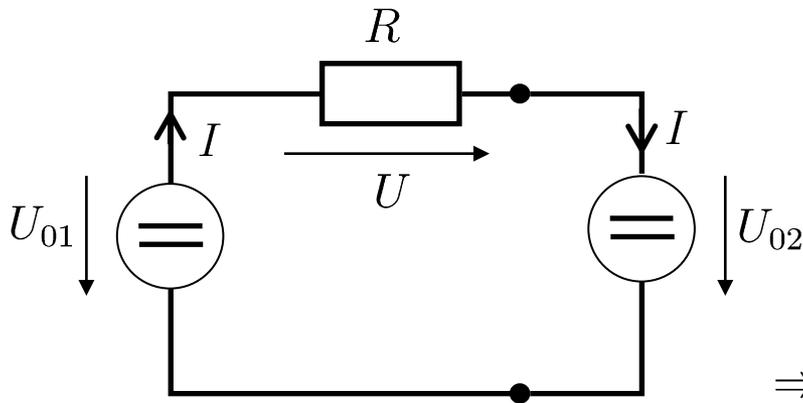
Wie groß ist U ?

$$U = f(I) = R \cdot I$$

Strombeitrag von Quelle 1 ... 2

$$I = I' - I''$$

d.h. $a = 1, b = -1$



Strombeiträge: $I' = U_{01}/R$ von Quelle 1

$I'' = U_{02}/R$ von Quelle 2

(Innenwiderstand der idealen Spannungsquelle = Null!)

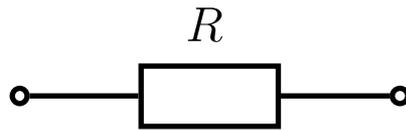
$$\Rightarrow U = a \cdot \underbrace{R \cdot I'}_{f(I')} + b \cdot \underbrace{R \cdot I''}_{f(I'')} = R \cdot I' - R \cdot I''$$

$$= R \cdot \frac{U_{01}}{R} - R \cdot \frac{U_{02}}{R} = U_{01} - U_{02} \quad \checkmark$$

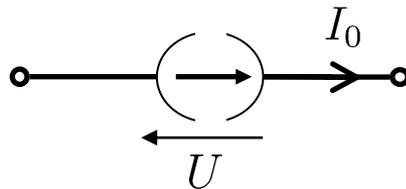
(hätte sich in diesem Fall natürlich schneller über Maschenumlauf ergeben!)

3.1 Einführung Zweipole

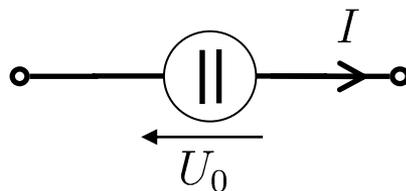
Konzentrierte Netzwerkelemente sind zunächst nur die folgenden **Zweipole**:



Ohmscher Widerstand



ideale Stromquelle



ideale Spannungsquelle

3.2 Das Superpositionsprinzip

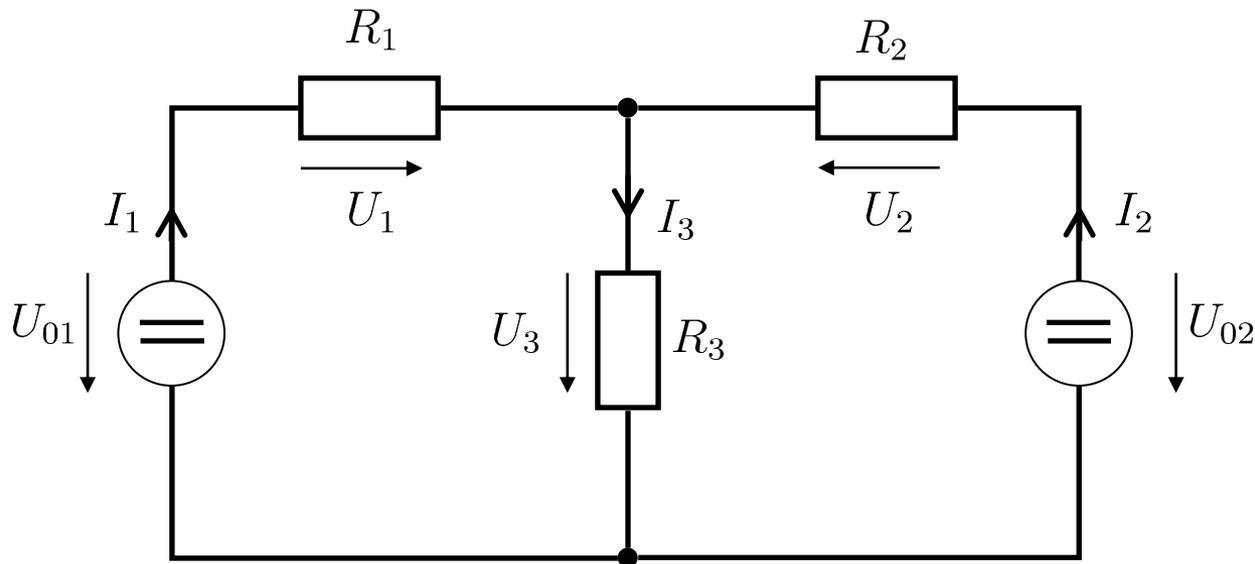
Gesucht: Ströme und Spannungen in einem Netzwerk.

Berechnung linearer Netzwerke durch Überlagerung (*Superposition*) der von den einzelnen Quellen hervorgerufenen Ströme und Spannungen.

Dabei werden alle idealen Spannungsquellen und alle idealen Stromquellen (bis auf die gerade betrachtete) durch einen Kurzschluss bzw. durch eine Unterbrechung ersetzt.

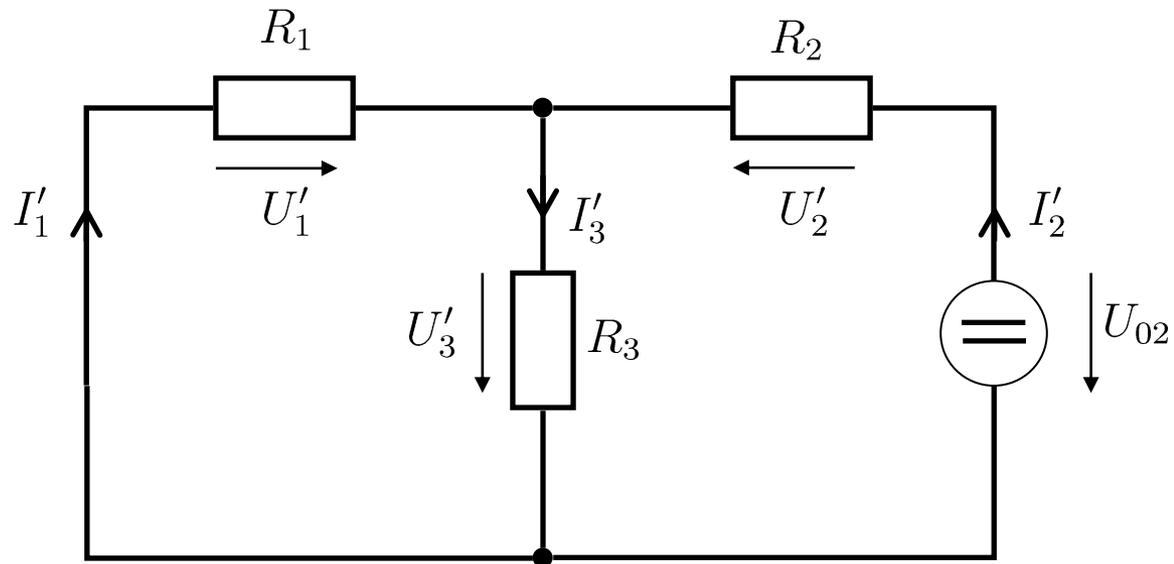
Beispiel:

$$I_1 = ?$$



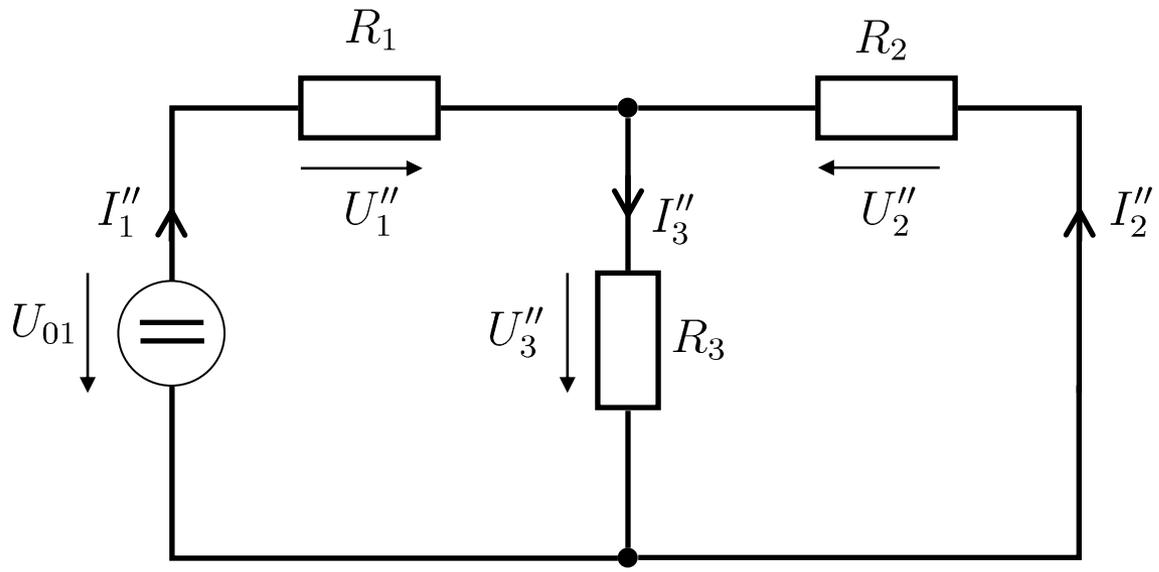
3.2 Das Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip



3.2 Das Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip



3.3 Die Methode der Ersatzquelle

Gesucht: Strom und Spannung in einem *einzelnen Zweig* des Netzwerkes.

Lösung: Da das Netzwerk linear ist, kann das (Rest-)Netzwerk bezüglich der Knoten des betrachteten Zweiges durch eine Ersatzspannungsquelle oder Ersatzstromquelle ersetzt werden.

Kenngrößen der Ersatzquelle:

Ersatzspannungsquelle: R_i und $U_L (= U_0)$.

Ersatzstromquelle: R_i und $I_K (= I_0)$.

3.3 Die Methode der Ersatzquelle

Prinzip

Bestimmung von R_i :

Alle idealen Spannungsquellen kurzschließen.

Alle idealen Stromquellen aufschneiden.

Betrachteten Zweig entfernen und den Widerstand des Netzwerkes bezüglich der Klemmen des betrachteten Zweiges bestimmen.

Bestimmung von U_L :

Betrachteten Zweig aufschneiden.

Leerlaufspannung an den Klemmen des Zweiges bestimmen.

Bestimmung von I_K :

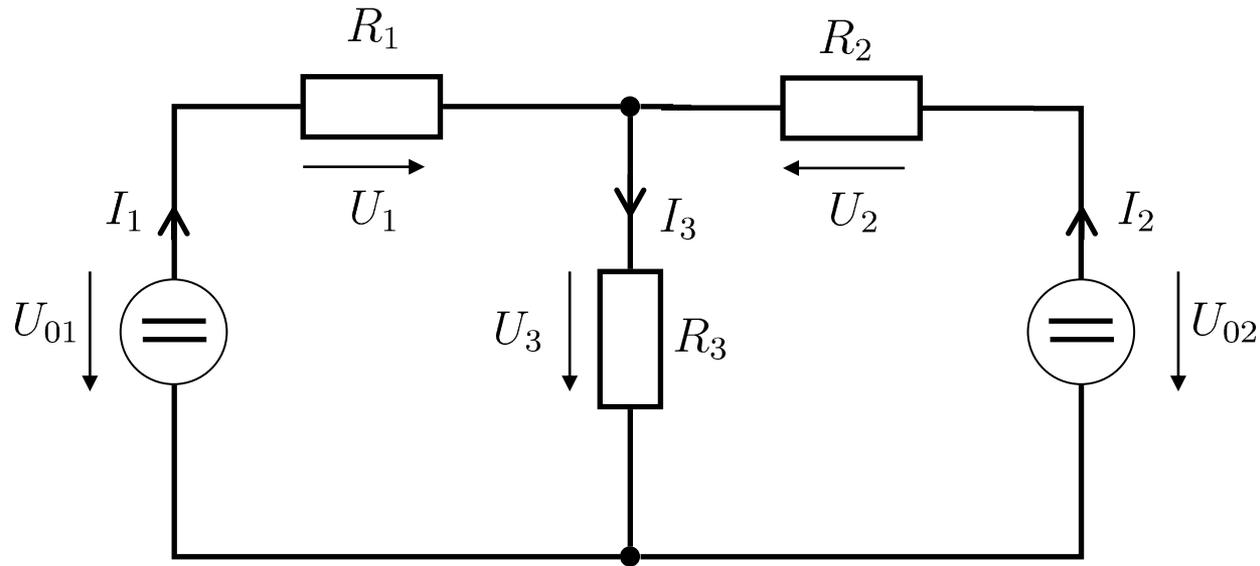
Betrachteten Zweig kurzschließen.

Kurzschlussstrom bestimmen.

3.3 Die Methode der Ersatzquelle

Beispiel: Ersatzspannungsquelle

Gesucht: I_2 und U_2



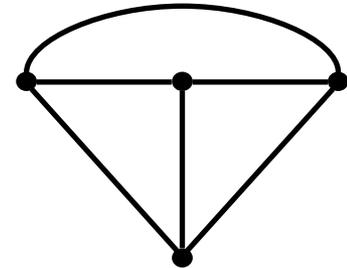
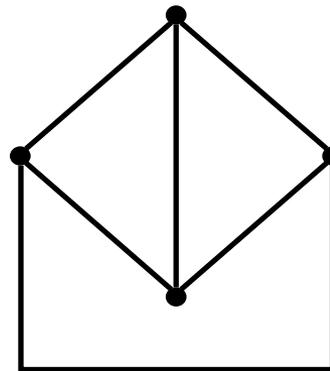
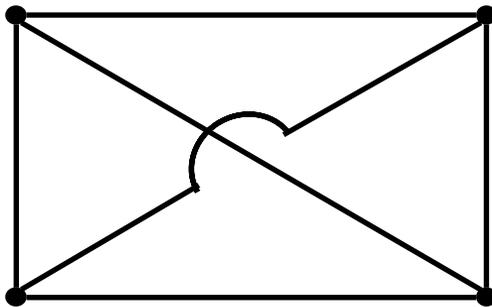
3.4 Das Maschenstromverfahren

Netzwerkanalyse mittels Graphentheorie (I)

Die Kirchhoffschen Gleichungen beschreiben die *Topologie* des elektrischen Netzwerkes, das Ohmsche Gesetz die Physik.

Topologische Eigenschaften geometrischer Figuren sind diejenigen Eigenschaften, die beim Deformieren der Figuren erhalten bleiben.

Beispiele *topologisch äquivalenter* Figuren:



Die topologischen Eigenschaften von geometrischen Figuren, die nur aus Knoten und Zweigen bestehen, lassen sich mit Hilfe der *Graphentheorie* beschreiben.

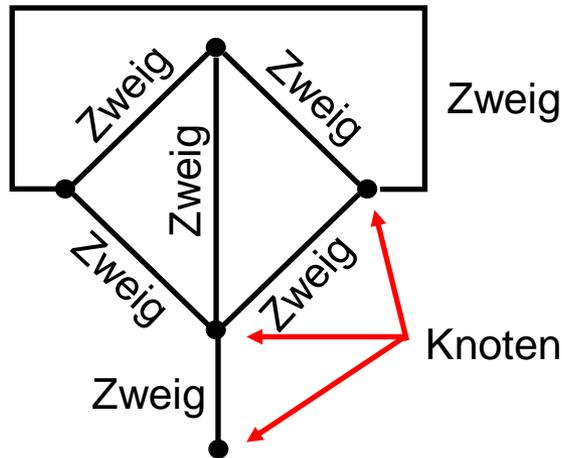
Aufgabe: Finde unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der Ströme und Spannungen
Lösung: \Rightarrow Graphentheorie

3.4 Das Maschenstromverfahren

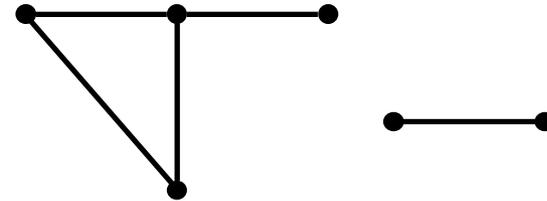
Netzwerkanalyse mittels Graphentheorie (II)

Einige wichtige Begriffe aus der Graphentheorie:

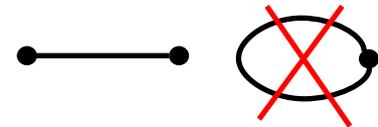
Zusammenhängender Graph:



Nicht-zusammenhängender Graph:



Zweig: ... hat 2 Enden mit *jeweils* einem **Knoten** (nicht derselbe!)



Keine parallelen Zweige!



3.4 Das Maschenstromverfahren

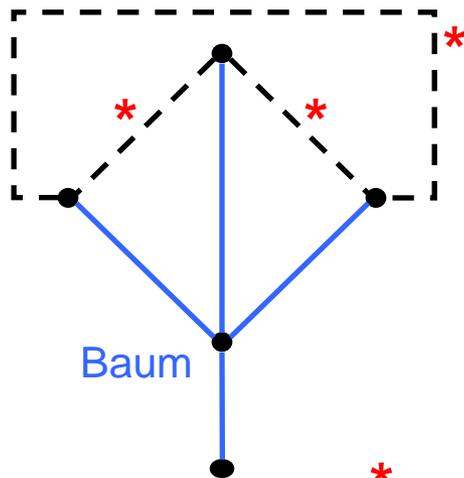
Netzwerkanalyse mittels Graphentheorie (III)

Baum: ... zusammenhängender Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen, der *alle Knoten* des Graphen enthält, jedoch *keine Maschen*.

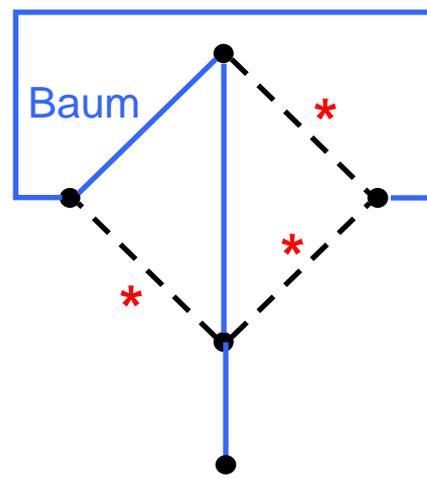
Verbindungszweige: ... die zu den Baumzweigen eines Graphen komplementäre Menge von Zweigen.
(unabhängige Zweige)

Beispiele zu dem zusammenhängenden Graphen auf der vorigen Seite:

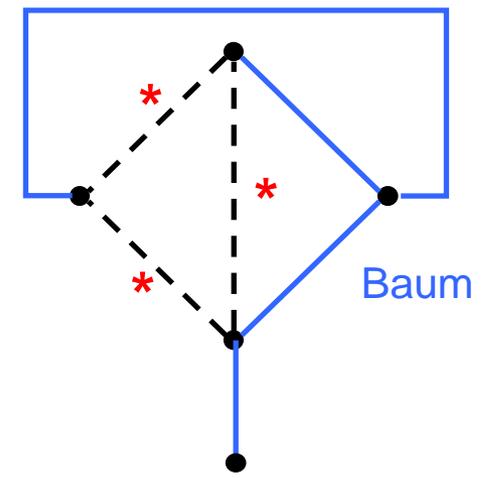
Ein möglicher *Baum*:



Ein anderer möglicher *Baum*:



Ein weiterer möglicher *Baum*:



* Verbindungszweige
- - - - -

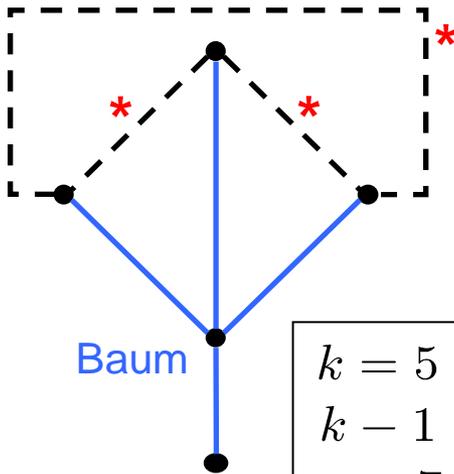
3.4 Das Maschenstromverfahren

Netzwerkanalyse mittels Graphentheorie (IV)

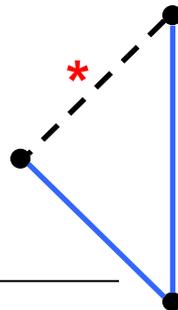
Wenn ein Baum k Knoten enthält, so besteht er aus $k - 1$ Zweigen.

Jeder Verbindungszweig eines zusammenhängenden Graphen bildet zusammen mit einer Teilmenge der Baumzweige eine *eindeutige* Masche.

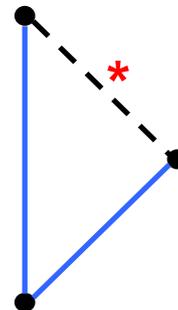
Gewählter Baum:



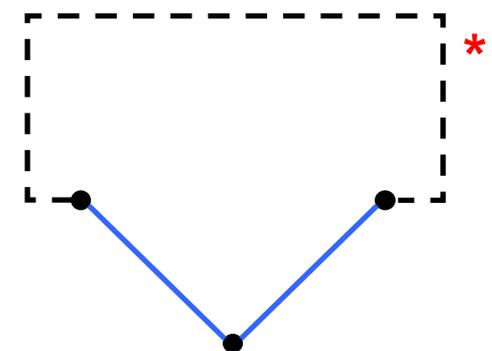
⇒ Masche 1:



Masche 2:



Masche 3:



$k = 5$	Knoten
$k - 1 = 4$	Baumzweige
$z = 7$	Graphenzweige

$m = 3$	* Verbindungszweige - - - - -
	bzw. linear unabhängige Maschen

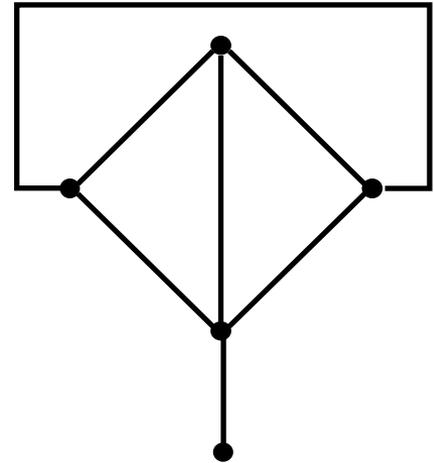
Ein zusammenhängender Graph mit k Knoten und z Zweigen enthält $m = z - k + 1$ linear unabhängige Maschen (Verbindungszweige).

3.4 Das Maschenstromverfahren

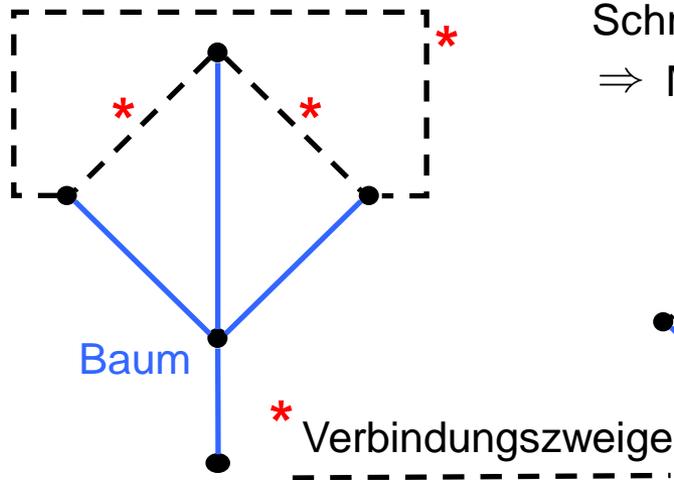
Netzwerkanalyse mittels Graphentheorie (V)

Damit ist eine formale Methode definiert, wie man aus einem gegebenen zusammenhängenden Graphen eine Anzahl von m linear unabhängigen Maschen definiert, wobei genau 1 Zweig jeder Masche ein Verbindungszweig ist.

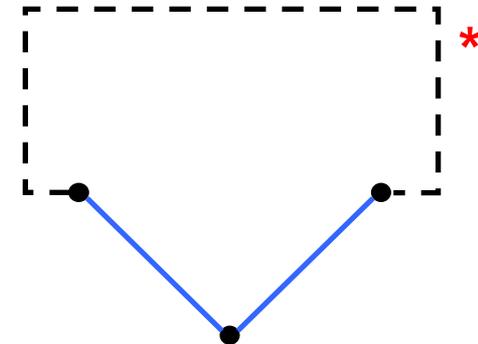
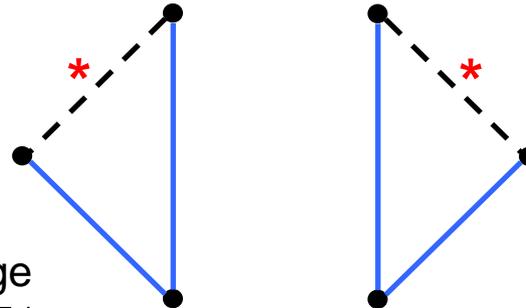
Schritt 1:
Zeichne Graphen:



Schritt 2: Wähle einen Baum:



Schritt 3: Es ergeben sich m eindeutige Maschen:
 \Rightarrow Masche 1: Masche 2: Masche 3:



3.4 Das Maschenstromverfahren

Noch einmal die Problemstellung mit Lösungsskizze

Gegeben:

Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten

Zählpfeile für Ströme und Spannungen

Widerstände R_ν

Reale Quellen (darstellbar durch Ersatzstrom- oder Ersatzspannungsquellen)

Gesucht: z unbekannte Zweigströme und z unbekannte Zweigspannungen
($2z$ Unbekannte)

Lösungsskizze:

Reduktion auf z Unbekannte mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes.

Aufstellen eines (linearen) Gleichungssystems zur Bestimmung der unbekanntenen Größen mit Hilfe der Kirchhoff'schen Sätze.

Problem:

Die Zweigströme und die Zweigspannungen sind wegen des 1. und 2. Kirchhoff'schen Satzes *nicht unabhängig*. Einsatz systematischer Verfahren zur Bestimmung *unabhängiger* Gleichungen: \Rightarrow Graphentheorie \Rightarrow Maschenstromverfahren

3.4 Das Maschenstromverfahren

Vom Netzwerk zum Graphen – Einige Tipps

Wenn ein aus Zweipolen bestehendes Netzwerk gegeben ist, erhält man den entsprechenden Graphen, indem man jeden Zweipol als Zweig auffasst, wobei die Klemmen des Zweipols die Endknoten des Zweigs darstellen.

Dabei werden die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen:

- keine parallelen Zweige (sonst ist es kein Graph!)
- in jedem Knoten enden mindestens drei Zweige (sonst ist es kein Knoten!)
- zusammenhängende Netzwerke
- keine widersprüchliche Zusammenschaltung von Maschen und Knoten.
Z.B. darf eine Masche nicht nur aus idealen Spannungsquellen bestehen.
Ein Knoten darf nicht ausschließlich von idealen Stromquellen gespeist werden.

3.4 Das Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren – Die 4 Schritte

Die $m = z - (k - 1)$ Ströme in den *Verbindungszweigen* eines Netzwerkes bilden ein System unabhängiger Zweigströme.

Die $k - 1$ Ströme in den *Baumzweigen* sind abhängige Zweigströme.

Die Maschenströme erfüllen die Knotengleichungen.

Annahme: Das Netzwerk enthält keine Stromquellen. Wenn es welche enthält, werden diese in Spannungsquellen umgewandelt.

Vorgehensweise:

- 1) Graphen des Netzwerkes erstellen und einen (vollständigen) Baum identifizieren.
- 2) Maschenströme $\overset{\circ}{I}_\nu$ festlegen.
- 3) Gleichungssystem für die Maschenströme $\overset{\circ}{I}_\nu$ aufstellen und lösen.
- 4) Ströme in den Baumzweigen durch Superposition der Maschenströme bestimmen.

Zu (3): Das Gleichungssystem kann in die folgende systematische Form gebracht werden

$$m = z - k + 1 : (\text{nächste Seite})$$

3.4 Das Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren – Vorgehen in Schritt (3)

Zu Schritt (3): Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & (\pm)R_{12} & \cdots & (\pm)R_{1m} \\ (\pm)R_{21} & R_{22} & \cdots & (\pm)R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\pm)R_{m1} & (\pm)R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{I}_1 \\ \overset{\circ}{I}_2 \\ \vdots \\ \overset{\circ}{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\{\nu\}_{(1)}} (\pm)U_{0\nu} \\ \sum_{\{\nu\}_{(2)}} (\pm)U_{0\nu} \\ \vdots \\ \sum_{\{\nu\}_{(m)}} (\pm)U_{0\nu} \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Maschenströme $\overset{\circ}{I}_\nu$ wird aus einem Gleichungssystem mit den folgenden Elementen bestimmt ($m = z - k + 1$):

R_{ii} : Summe aller Widerstände der Masche (i). Der Summenwiderstand (oder Eigenwiderstand) einer Masche ist stets positiv.

$(\pm)R_{ij} = (\pm)R_{ji}$, $i \neq j$: Koppelwiderstand zwischen der Masche (i) und der Masche (j). Der Koppelwiderstand ist positiv, wenn die Zählpfeile beider Maschenströme gleichgerichtet sind. Ansonsten ist der Koppelwiderstand negativ.

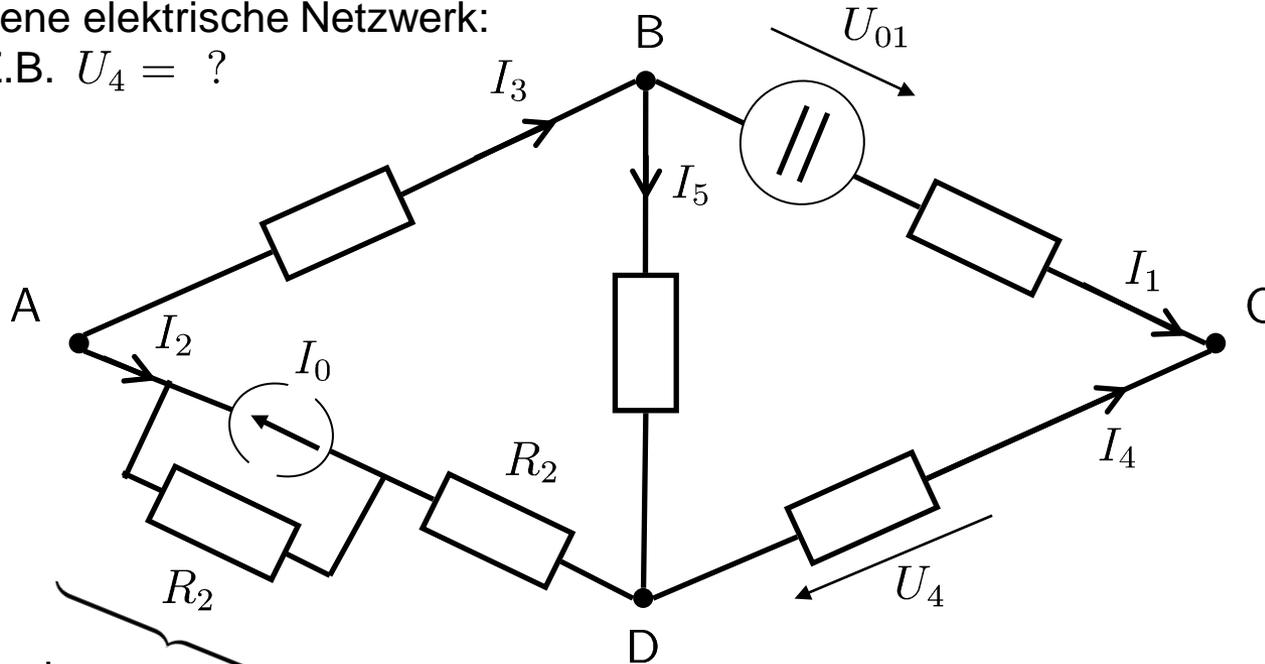
$\sum_{\{\nu\}_{(i)}} (\pm)U_{0\nu}$: Summe der Quellenspannungen der Masche (i). Die Summanden $(\pm)U_{0\nu}$ sind **negativ**, wenn der Zählpfeil der Quellenspannung **mit der Zählrichtung des Maschenstroms übereinstimmt** und positiv, wenn dies nicht der Fall ist.

3.4 Das Maschenstromverfahren

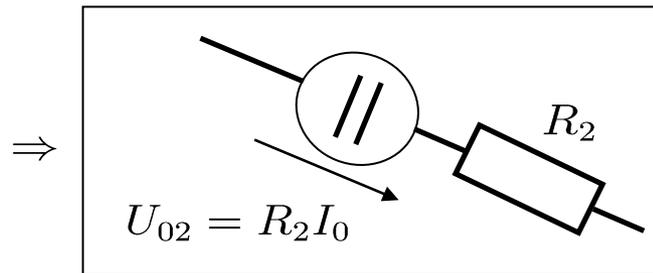
1. Beispiel zum Maschenstromverfahren (I)

Das gegebene elektrische Netzwerk:

Gesucht: Z.B. $U_4 = ?$



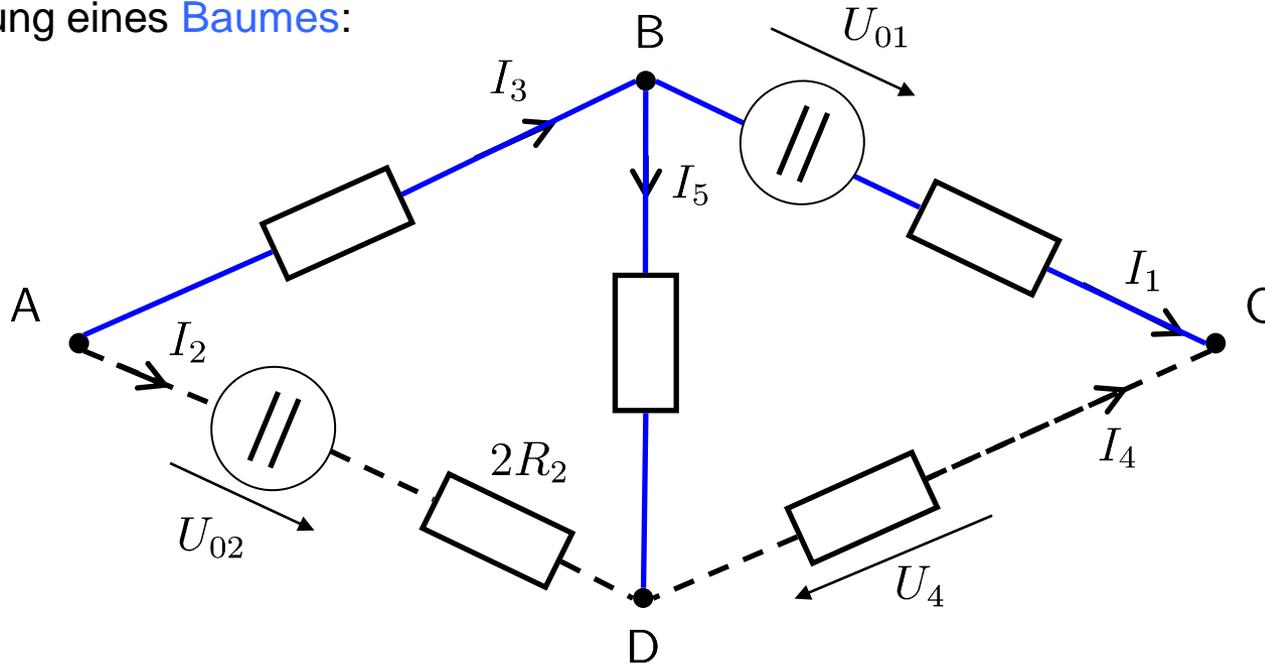
... muss in eine Ersatzspannungsquelle umgewandelt werden!



3.4 Das Maschenstromverfahren

1. Beispiel zum Maschenstromverfahren (II)

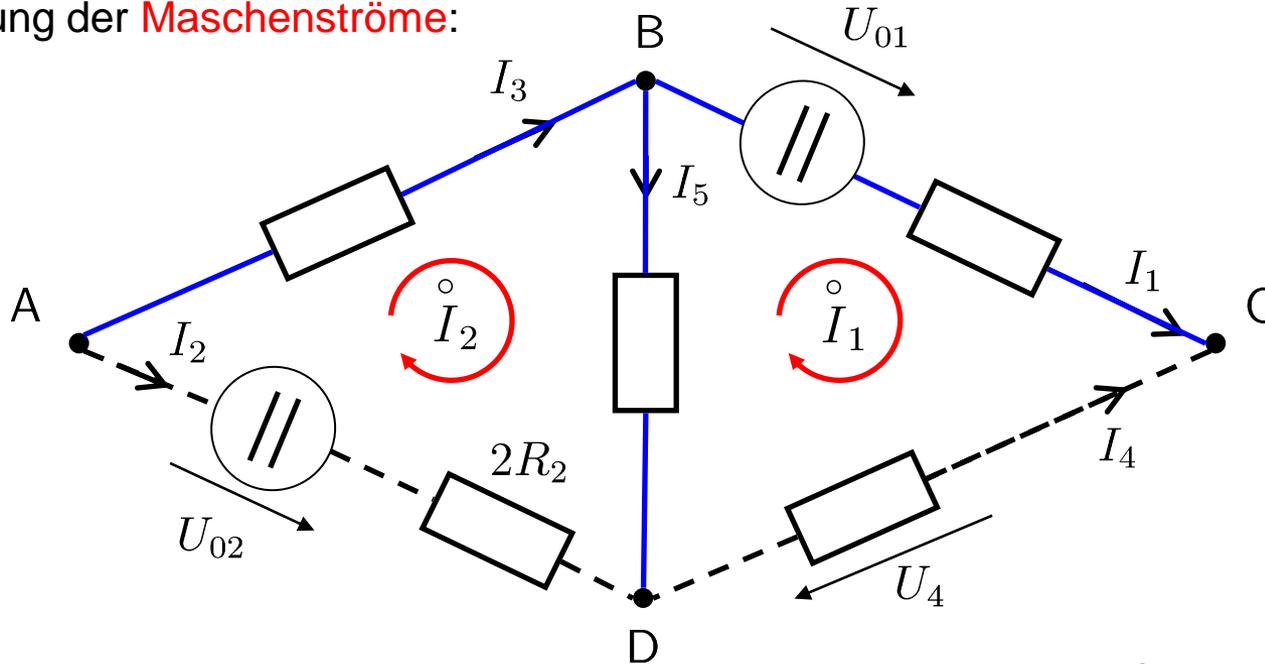
1) Festlegung eines Baumes:



3.4 Das Maschenstromverfahren

1. Beispiel zum Maschenstromverfahren (III)

2) Festlegung der **Maschenströme**:



3) Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems... $\Rightarrow \overset{\circ}{I}_1 = \dots, \quad \overset{\circ}{I}_2 = \dots$

4a) *Gesuchter Zweigstrom* durch Superposition der Maschenströme:

Z.B.: $I_4 = -\overset{\circ}{I}_1$ oder: $I_5 = \overset{\circ}{I}_2 - \overset{\circ}{I}_1$

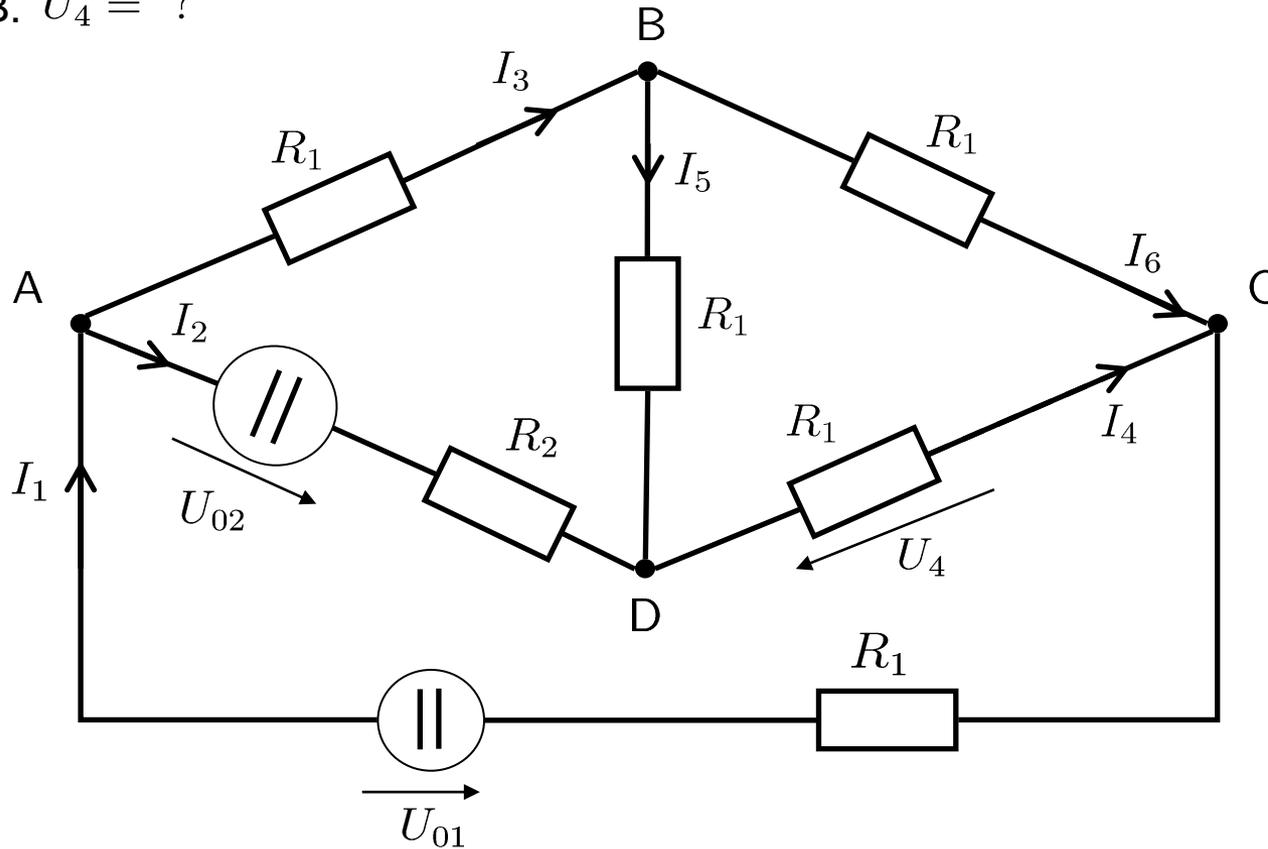
4b) *Gesuchte Zweigspannung* über Ohm'sches Gesetz: $U_4 = -R_1 \cdot I_4 = R_1 \cdot \overset{\circ}{I}_1$

3.4 Das Maschenstromverfahren

2. Beispiel zum Maschenstromverfahren (I)

Das gegebene elektrische Netzwerk:

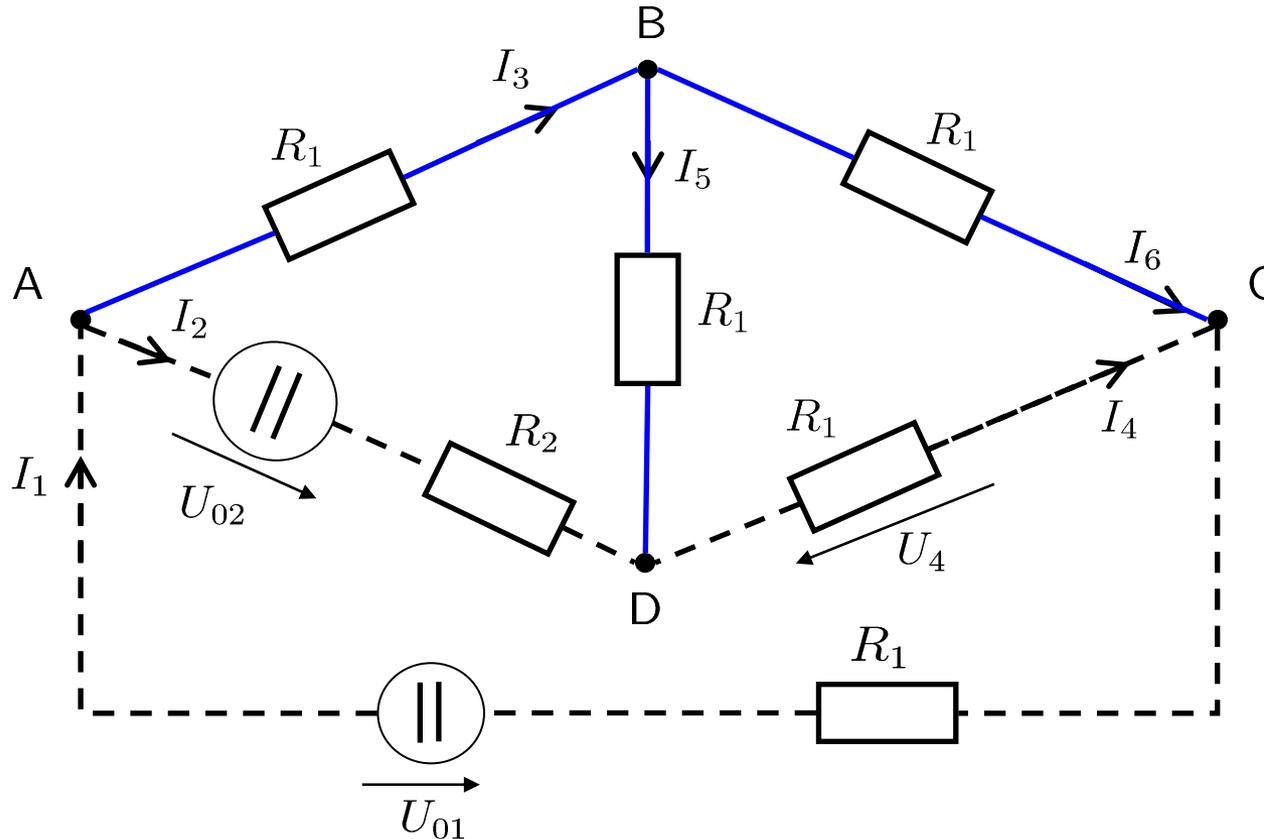
Gesucht: Z.B. $U_4 = ?$



3.4 Das Maschenstromverfahren

2. Beispiel zum Maschenstromverfahren (II)

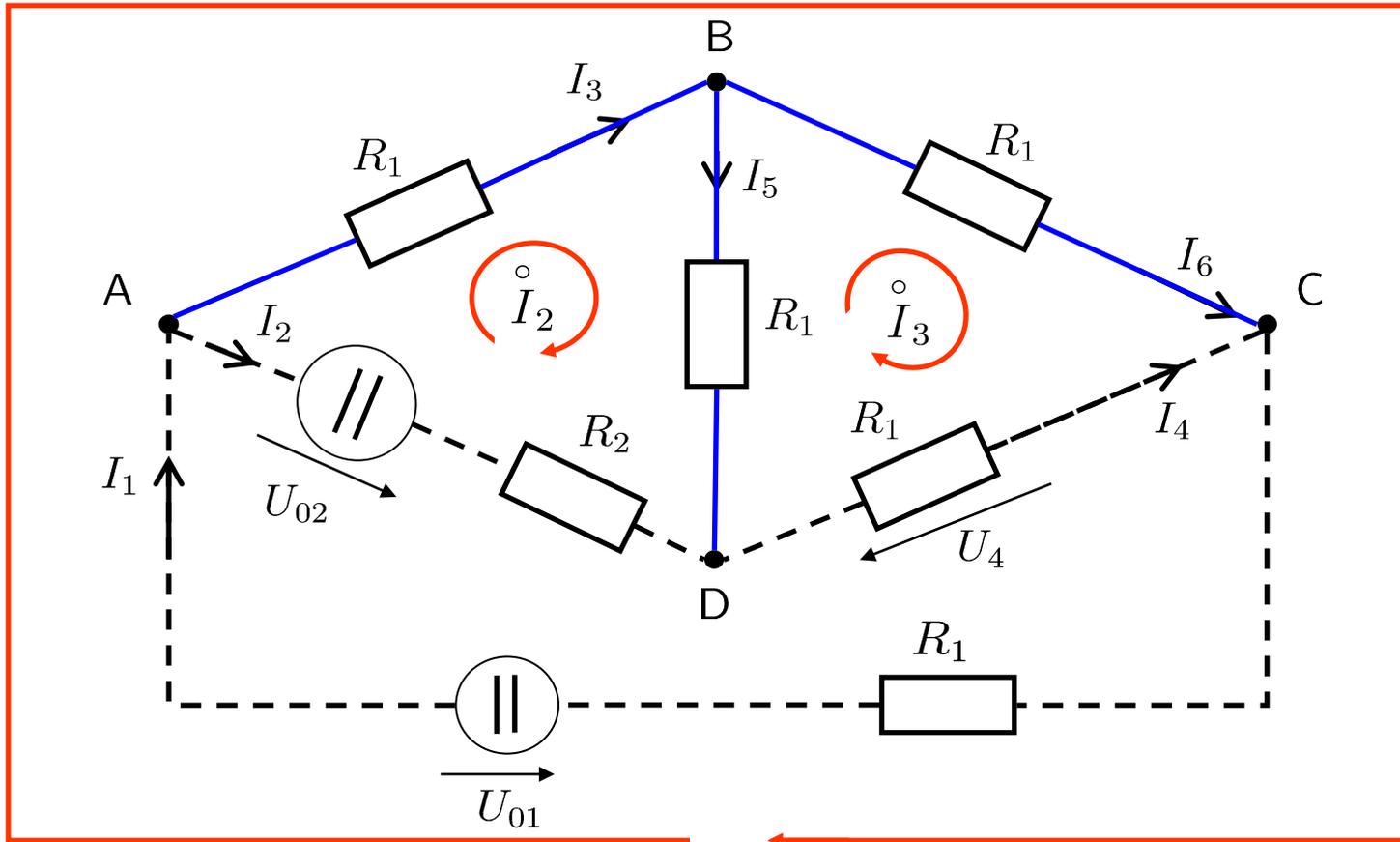
Auswahl eines Baumes:



3.4 Das Maschenstromverfahren

2. Beispiel zum Maschenstromverfahren (III)

Festlegung der Maschenströme:



Maschen-
Ströme
 $\overset{\circ}{I}_1$

4. KAPAZITÄT UND INDUKTIVITÄT

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

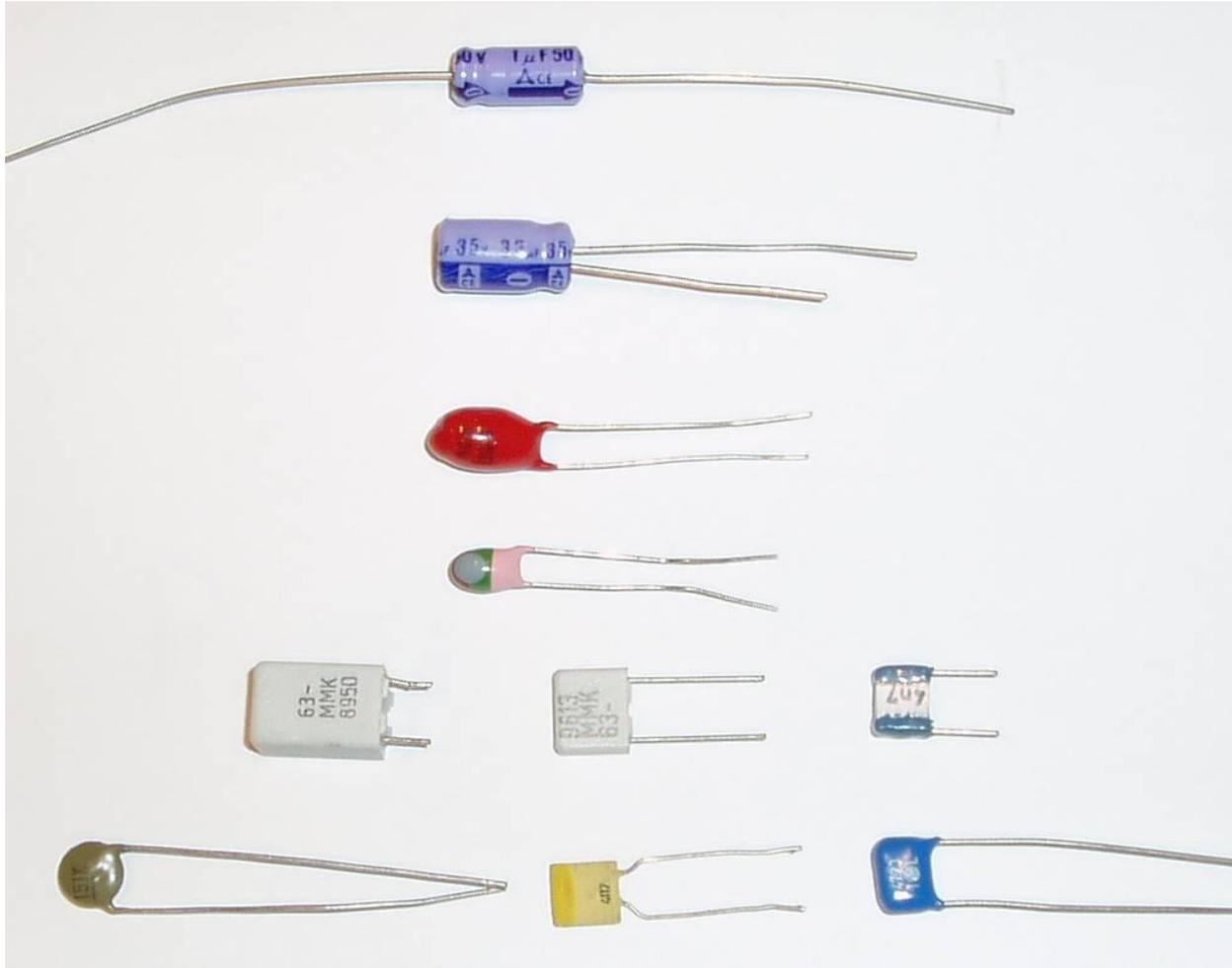
4.1 Der Kondensator (Kapazität)

4.2 Die Spule (Induktivität)



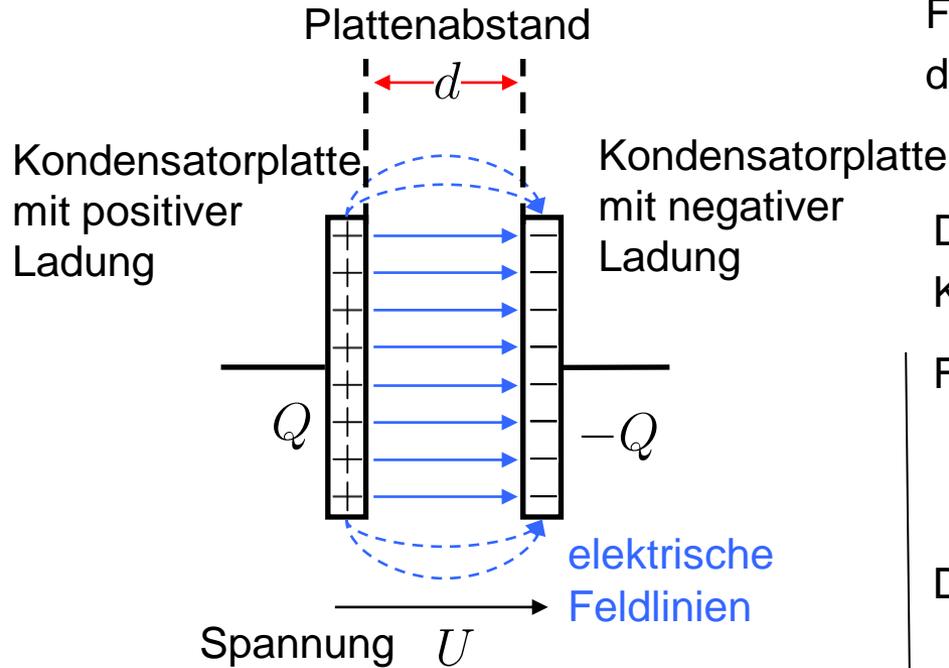
4.1 Der Kondensator

Kondensatortypen



4.1 Der Kondensator

Der Plattenkondensator



Für einen gegebenen Kondensator zeigt sich die Proportionalität von Ladung und Spannung:

$$Q \sim U$$

$$Q = C \cdot U$$

Die Proportionalitätskonstante C nennt man Kapazität: $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \text{F}$ (Farad).

Für den Plattenkondensator links gilt:

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Plattenfläche
(in die Bildebene hinein)

Plattenabstand

Dielektrizitätskonstante:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

mit der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Vakuum: Relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 1$

Andere Stoffe:

Stoff	ϵ_r
Luft	≈ 1
Glas	5 ... 10
Bariumtitanat	1000 ... 4000

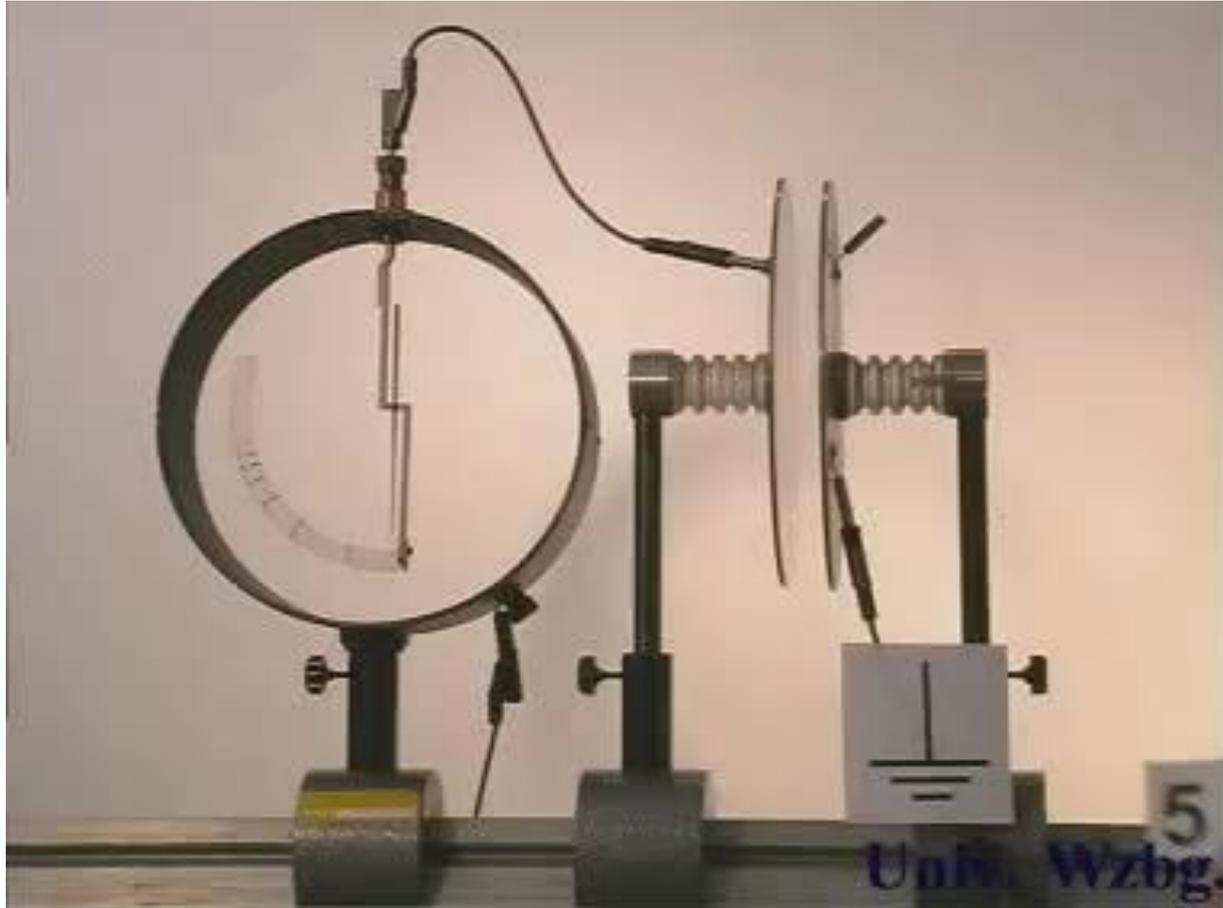
Allgemein gilt: $Q(t) = C \cdot u(t)$ mit

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

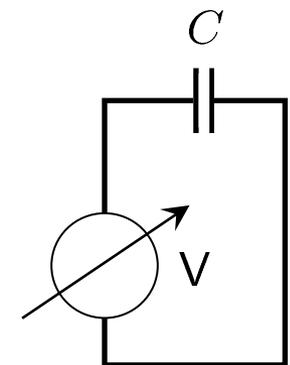
4.1 Der Kondensator

Der Plattenkondensator - Spannungsmessung

Demo:



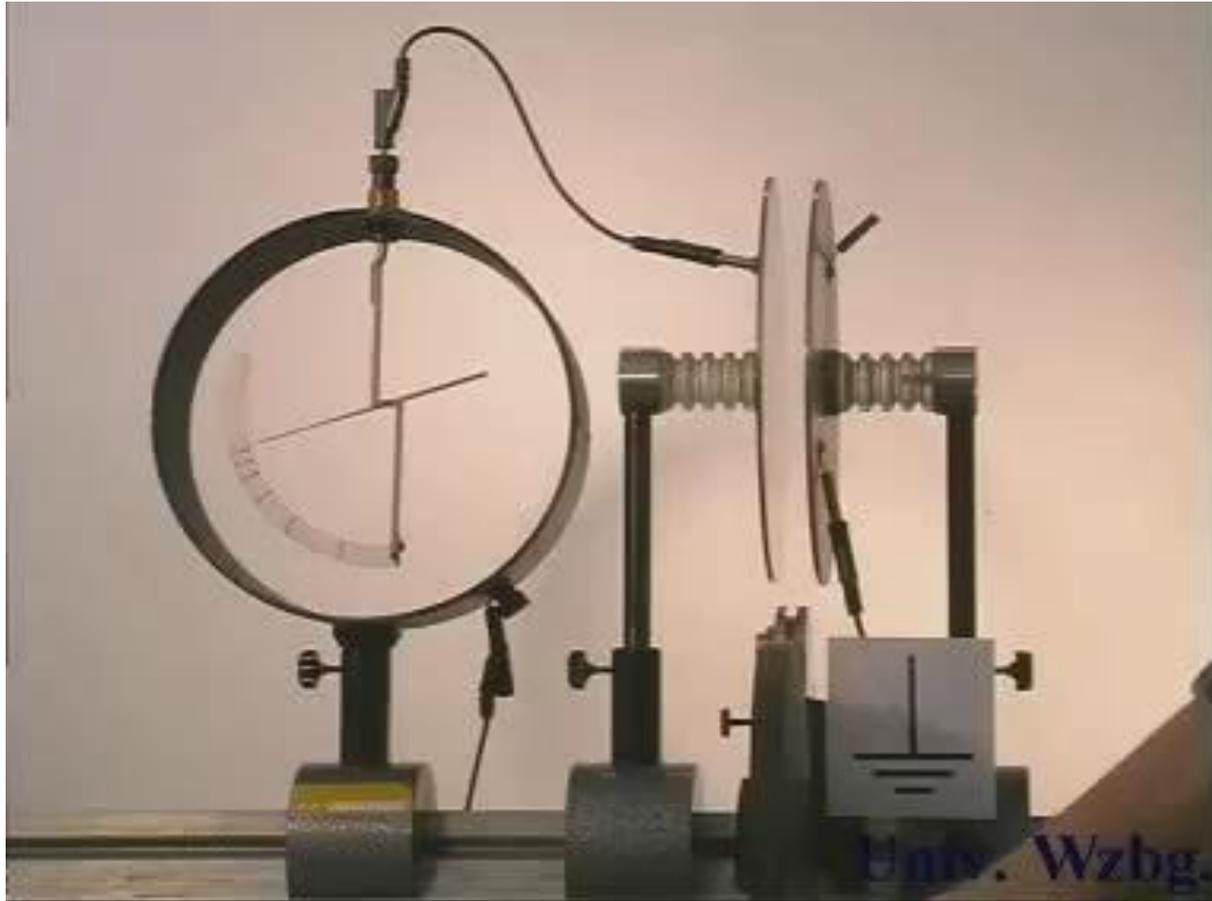
$$Q = \epsilon \frac{U}{d} A$$



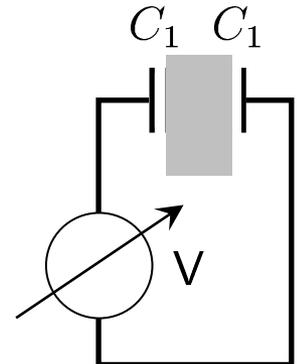
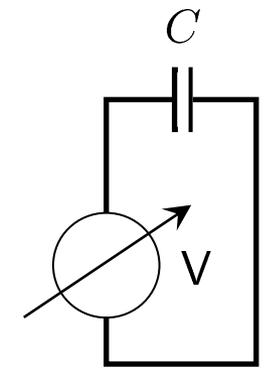
4.1 Der Kondensator

Der Plattenkondensator

Demo:

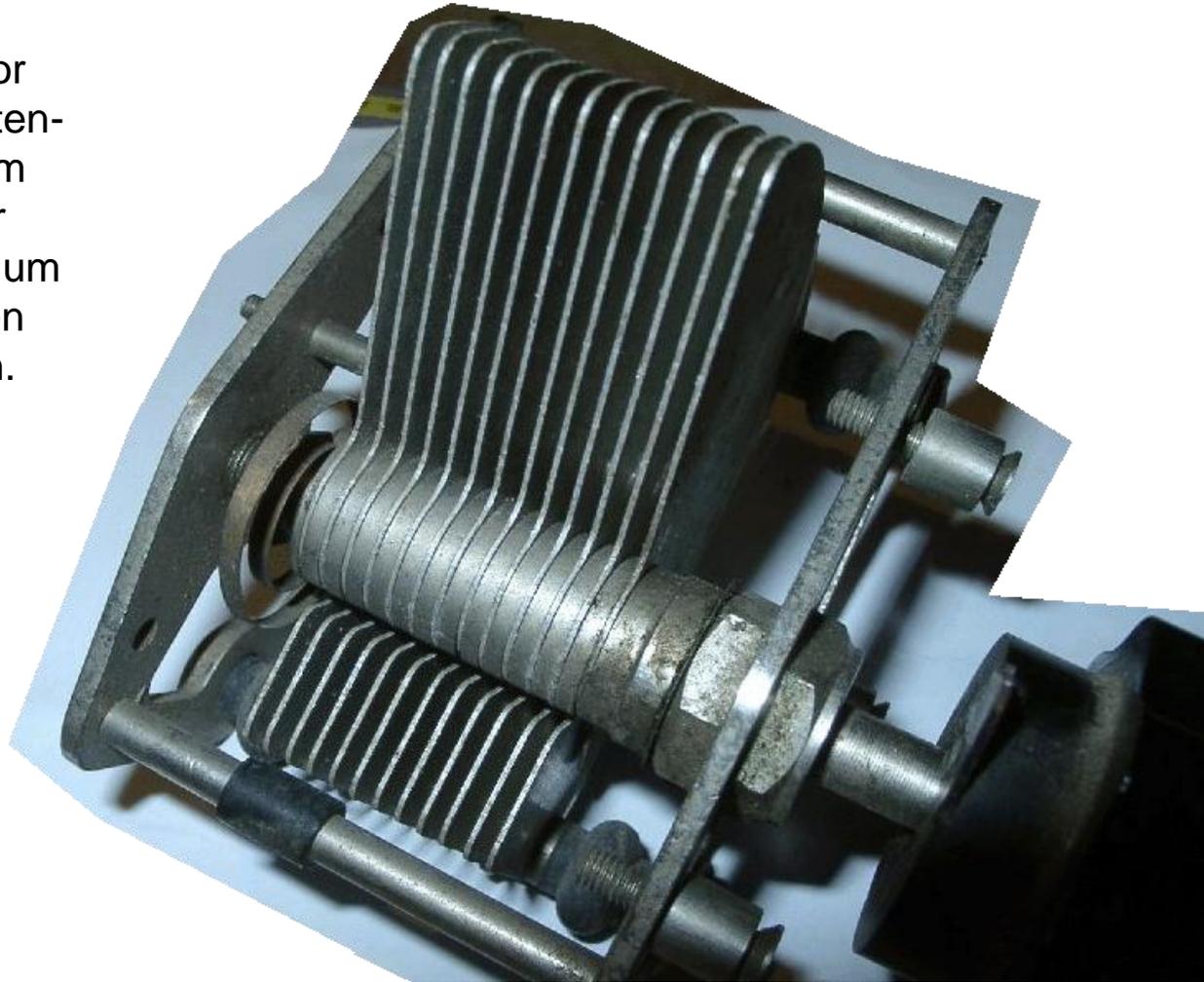


$$Q = \epsilon \frac{U}{d} A$$



4.1 Der Kondensator Drehkondensator

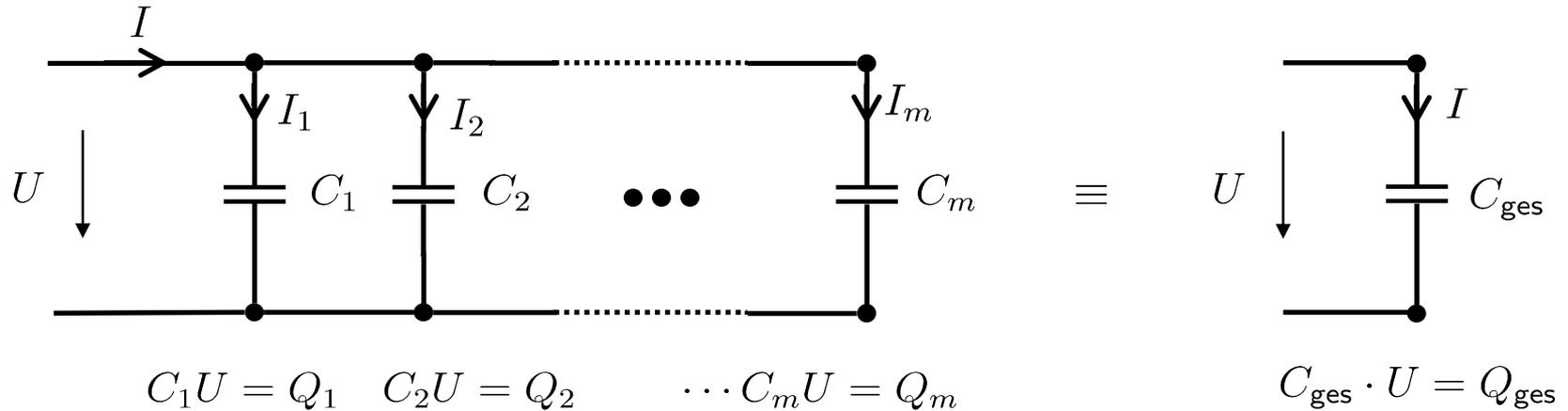
Der Drehkondensator ist ein variabler Plattenkondensator, mit dem Rundfunkempfänger ausgestattet waren, um Empfangsfrequenzen wechseln zu können.



4.1 Der Kondensator

Parallelschaltung von Kapazitäten

Alle Kondensatoren liegen an der gleichen Spannung U .



$$Q_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m Q_{\nu} = U \sum_{\nu=1}^m C_{\nu} = C_{\text{ges}} \cdot U$$

Parallelschaltung von
Kondensatoren:

$$C_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m C_{\nu}$$

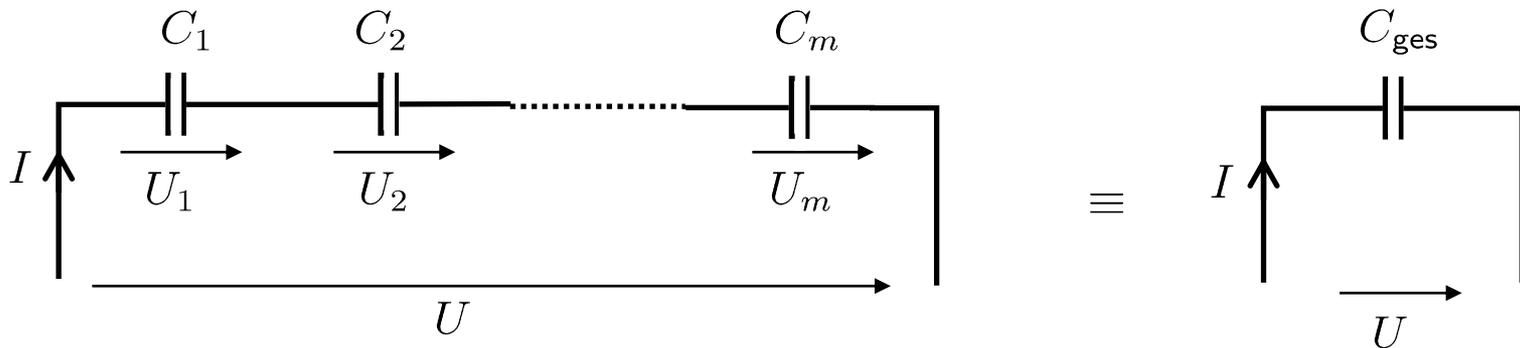
Gedankenstütze Plattenkondensator:
Die Plattengrößen der einzelnen
Kondensatoren addieren sich!
(bei gleichem ϵ, d)

4.1 Der Kondensator

Reihenschaltung von Kapazitäten

Gedankenexperiment: Bringt man auf die beiden äußersten Kondensatorplatten der Anordnung eine Ladung $+Q$ (links) und $-Q$ (rechts) auf, so werden auf den Platten dazwischen jeweils Ladungen $\pm Q$ induziert.

\Rightarrow alle Kondensatorplatten tragen die Ladung $\pm Q$



Anwendung des 2. Kirchhoffschen Satzes

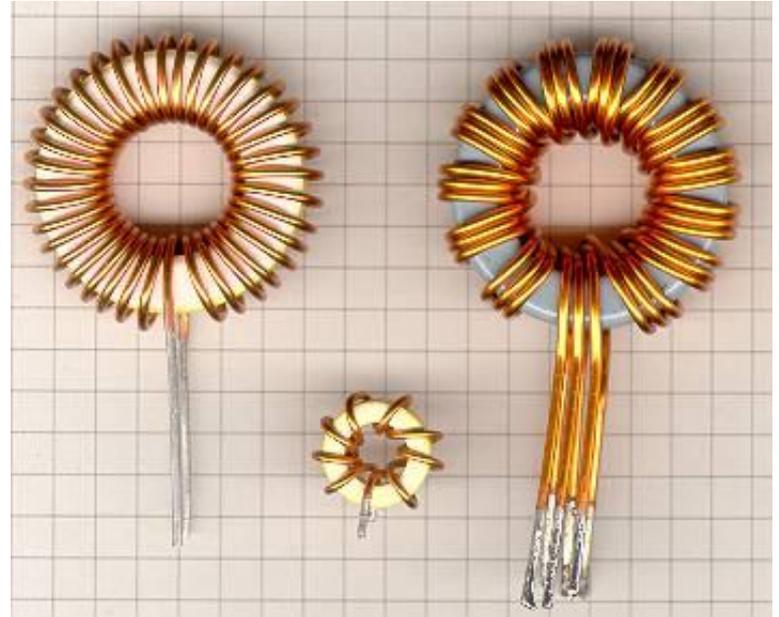
$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_m = Q \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{C_\nu} = Q \frac{1}{C_{\text{ges}}}$$

Reihenschaltung von
Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{C_\nu}$$

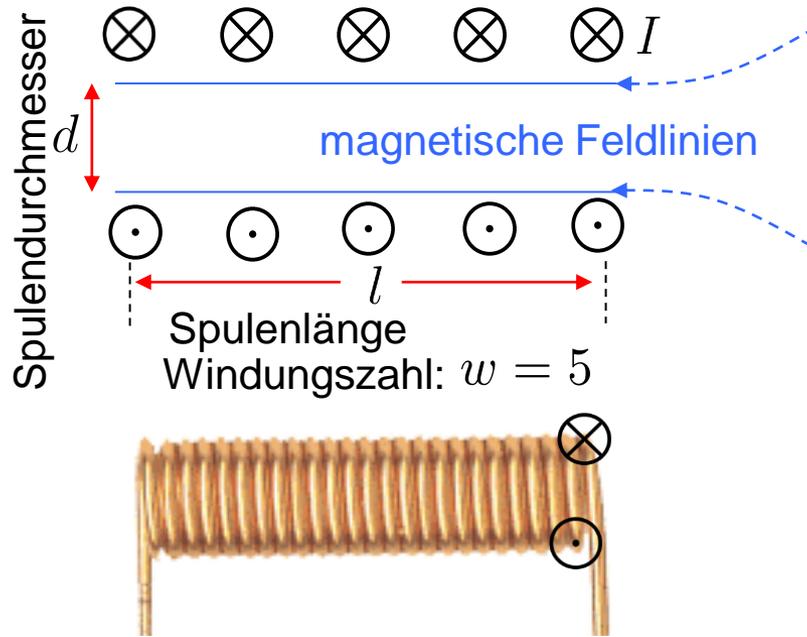
4.2 Die Spule

Spulentypen



4.2 Die Spule

Die Zylinderspule



Strom tritt
 $\otimes I$... in Bildebene hinein
 $\odot I$... aus Bildebene hinaus

Für eine gegebene Spule zeigt sich die Proportionalität Spannung und Stromänderung:

$$u(t) \sim \frac{di(t)}{dt} \quad \boxed{u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$$

Die Proportionalitätskonstante L nennt man (Selbst-)Induktivität: $[L] = \frac{[U][t]}{[I]} = \frac{Vs}{A} = H$ (Henry).

Für die Zylinderspule links gilt:

$$\boxed{L = \mu \cdot \frac{w^2 d^2}{4l}}$$

Permeabilitätskonstante:

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

mit der Permeabilitätskonstanten des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Vakuum: Relative Permeabilitätskonstante $\mu_r = 1$

4.2 Die Spule

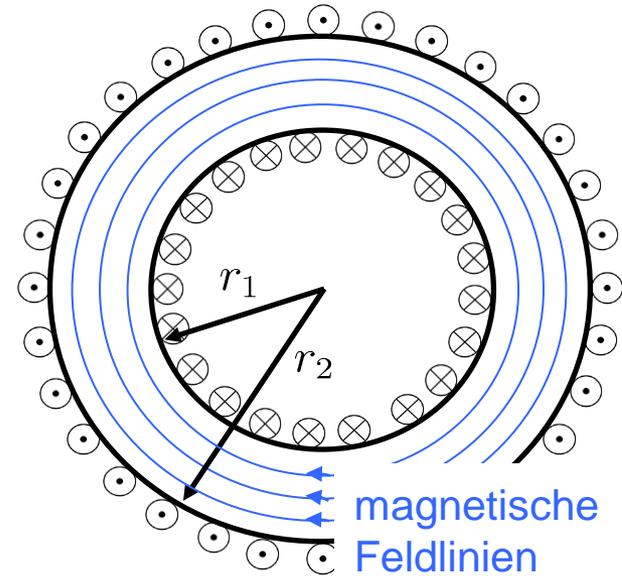
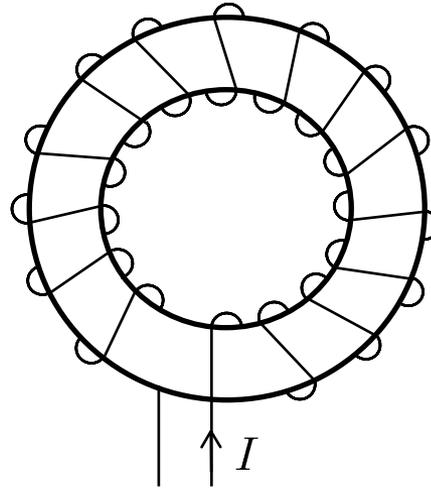
Permeabilitätskonstante einiger Stoffe

	Stoffe	μ_r
<i>Diamagnetische</i> Stoffe	Aluminiumoxid	0,999 986 4
	Kupfer	0,999 990 4
	Wasser	0,999 990 97
<i>Paramagnetische</i> Stoffe	Aluminium	1,000 020 8
	Eisen 800°C	1,149
	Eisen 1200°C	1,002 59
	Sauerstoff	1,000 001 86
<i>Ferromagnetische</i> Stoffe	Baustahl	100...800 bzw. 2000
	Permalloy	6000...70 000
	75,5Ni, 3Mo	

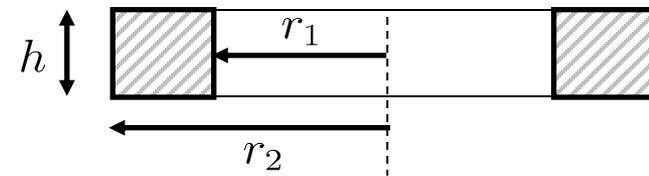
[Albach, Grundlagen der Elektrotechnik I]

4.2 Die Spule

Induktivität der Ringspule



Die Spule habe einen rechteckigen Querschnitt der Höhe h :



Für die Ringspule oben gilt:

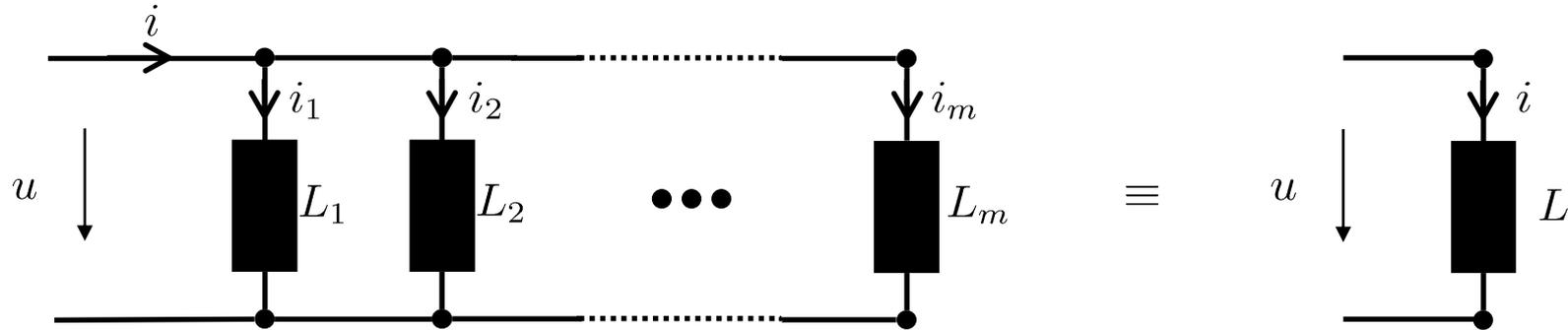
$$L = \mu \frac{w^2 h}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Allgemein hat man: $L \sim w^2$ (bei konst. Länge/Radien)
 $L \sim \mu$

4.2 Die Spule

Parallelschaltung von Induktivitäten

Alle Induktivitäten liegen an der gleichen Spannung u .



Anwendung des 1. Kirchhoffschen Satzes und zeitliche Ableitung:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_m$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_m}{dt} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \dots + \frac{u}{L_m} = u \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{L_\nu} = \frac{u}{L_{\text{ges}}}$$

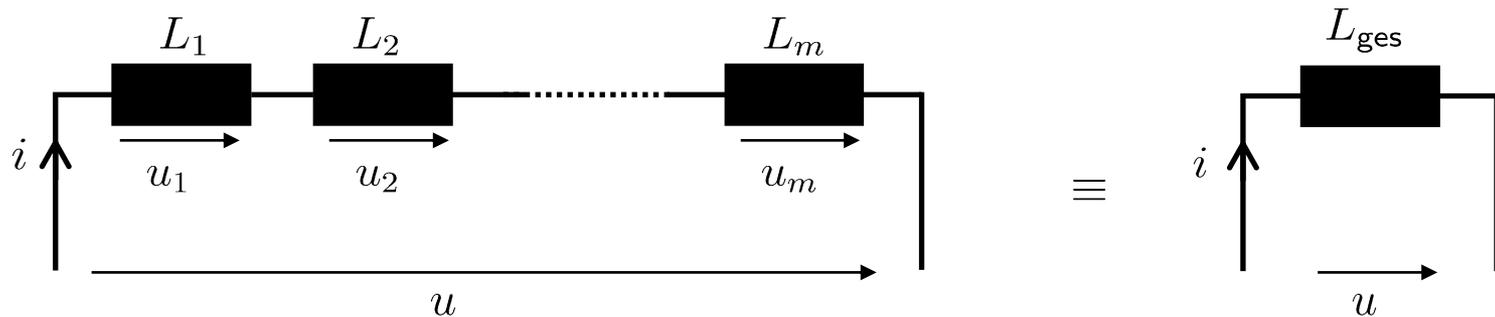
Parallelschaltung von
Spulen:

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{L_\nu}$$

4.2 Die Spule

Reihenschaltung von Induktivitäten

Die Induktivitäten werden alle durch den gleichen Strom durchflossen.



Anwendung des 2. Kirchhoffschen Satzes:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_m = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_m \frac{di}{dt} = \sum_{\nu=1}^m L_{\nu} \frac{di}{dt} = L_{\text{ges}} \frac{di}{dt}$$

Reihenschaltung von
Spulen:

$$L_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m L_{\nu}$$

Gedankenstütze Zylinderspule:

Die Windungszahlen der einzelnen
Spulen addieren sich!

(bei gleichem $\frac{w}{l}$, d , μ)

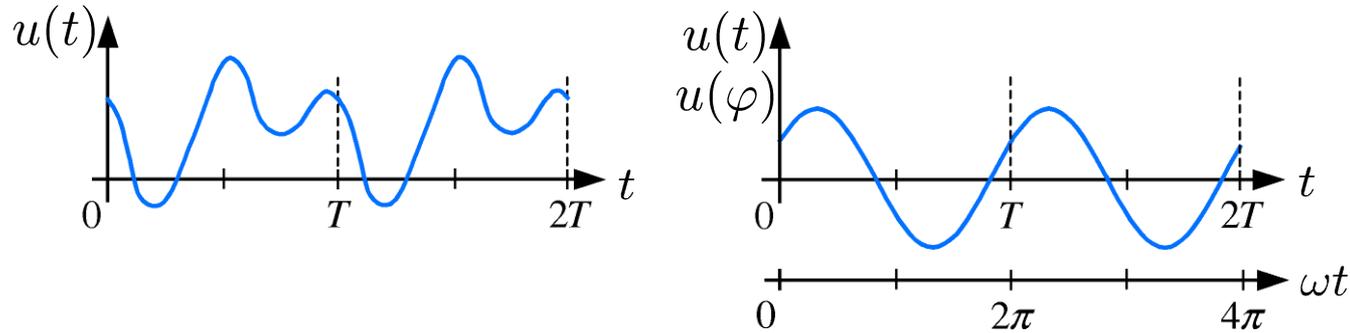
5. DIE KOMPLEXE WECHSELSTROMRECHNUNG

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

- 5.1 Wechselströme
- 5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen
- 5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken
- 5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

5.1 Wechselströme

Kurvenformen und Kenngrößen zeitlich periodischer Vorgänge



a) Beliebige periodische Signalform b) Sinusförmige periodische Signalform

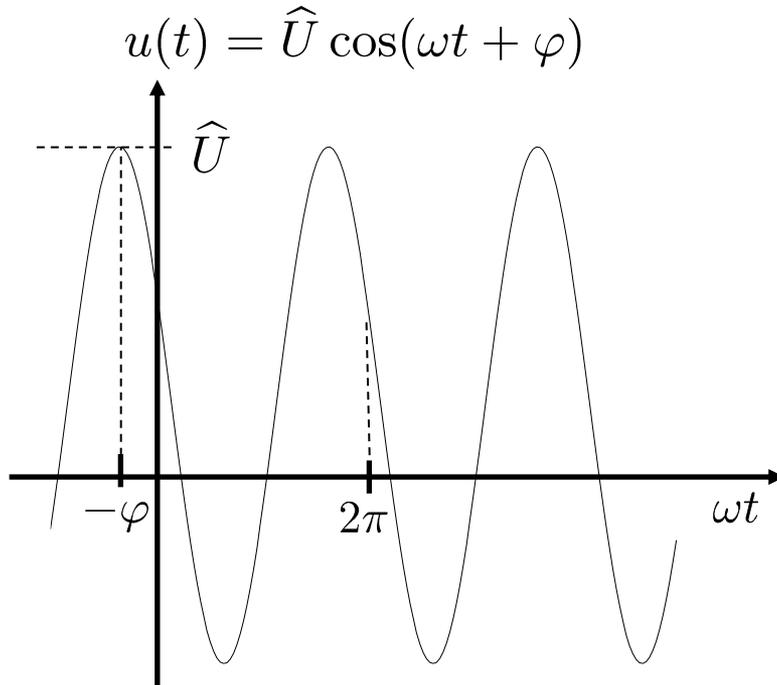
Periodische Signale können innerhalb der Periodendauer T einen beliebigen zeitlichen Verlauf haben.

Nach jeder Periodendauer wiederholen sich die Kurvenformen auf die exakt gleiche Weise:

$$u(t + kT) = u(t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

5.1 Wechselströme

Sinusförmige Ströme und Spannungen



Eine *sinusförmige* Wechselspannung

$$u(t) = u = \hat{U} \cos(\alpha) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$$

ist durch die Angabe

der *Amplitude* \hat{U} ,

der *Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

(bzw. der *Periodendauer* T),

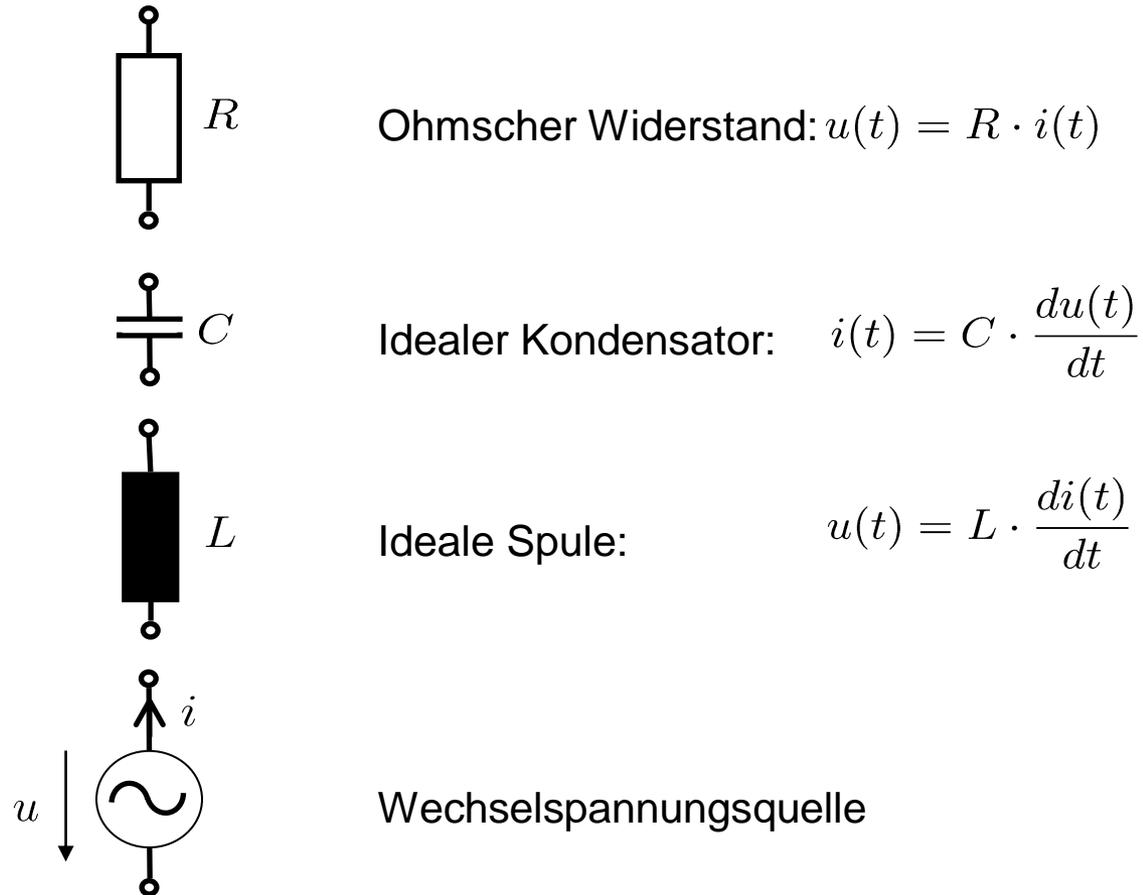
und des *Phasenwinkels* φ

vollständig festgelegt.

5.1 Wechselströme

Wechselstromnetzwerke

Wir betrachten Netzwerke, die aus den folgenden konzentrierten Elementen bestehen:



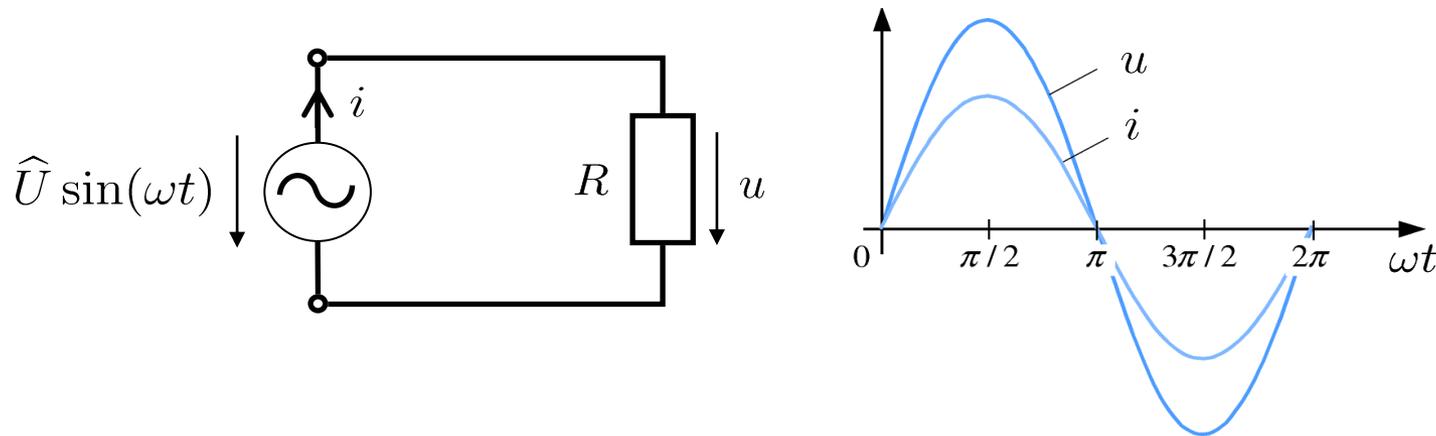
5.1 Wechselströme

Strom und Spannung am Ohm'schen Widerstand

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist zu jedem Zeitpunkt durch das Ohm'sche Gesetz gegeben:

Phasen: Strom und Spannung sind *in Phase*: $\hat{U} \sin(\omega t) = R \cdot \hat{I} \sin(\omega t)$

Amplituden: Strom und Spannung über das Ohm'sche Gesetz: $\hat{U} = R \cdot \hat{I}$



5.1 Wechselströme

Strom und Spannung am idealen Kondensator (I)

Für ideale Kondensatoren C und sinusförmige Spannung gilt:

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$

Gesucht: $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$

=

Definition einer Reaktanz (Blindwiderstand): $X = \frac{1}{\omega C} \quad [\Omega]$

Phasen: Phasenverschiebung um 90° : $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

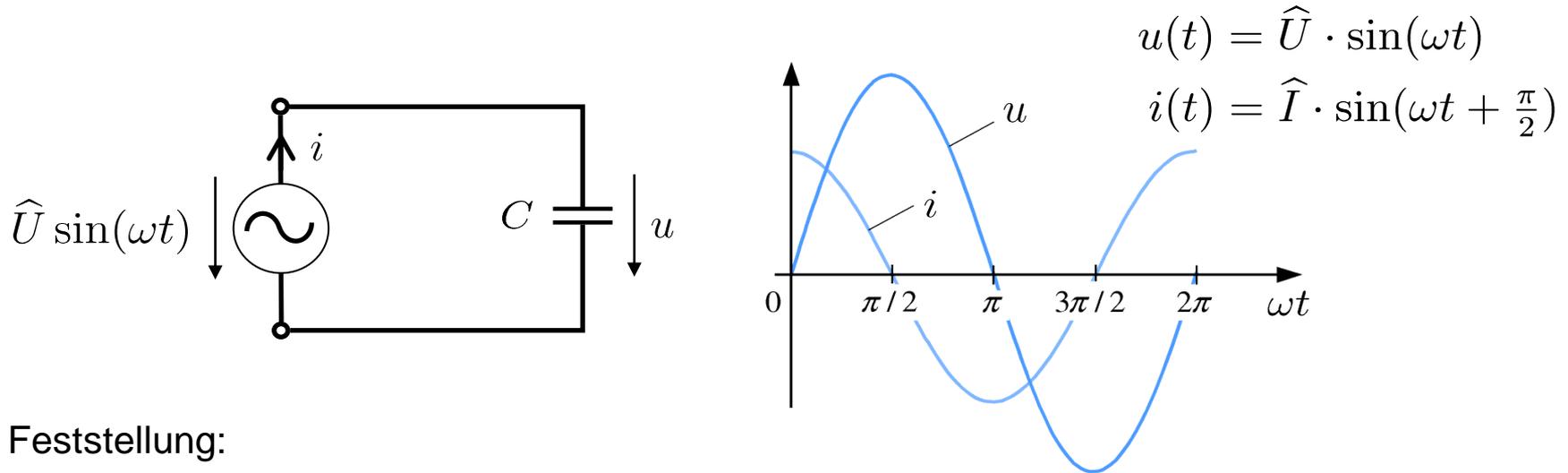
Amplituden: Frequenzabhängigkeit: $\hat{U} = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}$

Für Amplituden gilt dann analog zum Ohm'schen Gesetz:

$$\hat{U} = X \cdot \hat{I}$$

5.1 Wechselströme

Strom und Spannung am idealen Kondensator (II)



Feststellung:

Der Strom am Kondensator hat eine von der Frequenz abhängige Größe $\hat{I} = \omega C \cdot \hat{U}$. Seine Frequenz ω ist gleich wie bei der Spannung, jedoch eilt der Strom um eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ voraus! !

Niedrige Frequenzen ($\omega \rightarrow 0$): $X = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{I} = \frac{\hat{U}}{X} \rightarrow 0$!

Hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$): $X = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{I} = \frac{\hat{U}}{X} \rightarrow \infty$!

5.1 Wechselströme

Strom und Spannung an der idealen Spule (I)

Für die ideale Spule und sinusförmige Spannung gilt:

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$

Gesucht: $i(t) = ?$

Es gilt: $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

$$i(t) = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = -\hat{I} \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

5.1 Wechselströme

Strom und Spannung an der idealen Spule (II)

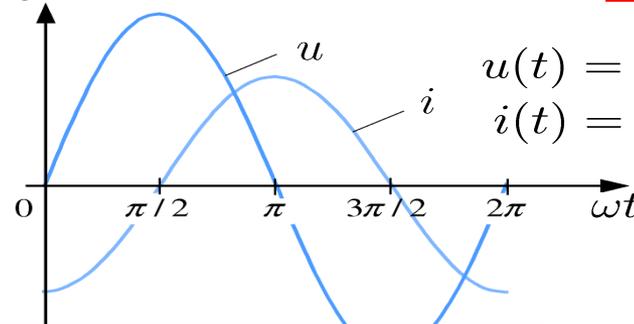
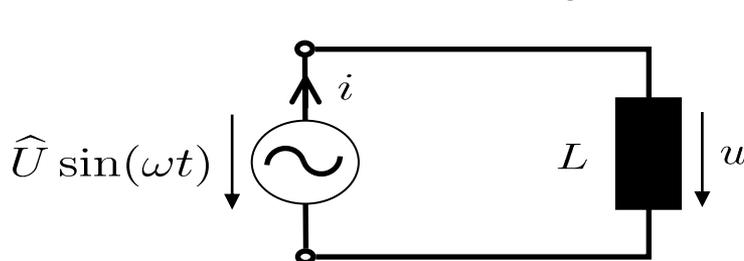
Definition einer Reaktanz (Blindwiderstand): $X = \omega L$

Phasen: Phasenverschiebung um 90° : $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = \hat{I} \sin(\omega t - \pi/2)$

Amplituden: Frequenzabhängigkeit: $\hat{U} = \omega L \cdot \hat{I}$

Für Amplituden gilt dann analog zum Ohm'schen Gesetz:

$$\hat{U} = X \cdot \hat{I}$$



$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$
$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t - \pi/2)$$

Feststellung:

Der Strom an der Spule hat eine von der Frequenz abhängige Größe $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$. Seine Frequenz ω ist gleich wie bei der Spannung, jedoch eilt der Strom um eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ hinterher!



Niedrige Frequenzen ($\omega \rightarrow 0$): $X = \omega L \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{I} = \frac{\hat{U}}{X} \rightarrow \infty$!

Hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$): $X = \omega L \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{I} = \frac{\hat{U}}{X} \rightarrow 0$!

5.1 Wechselströme

Die Kirchhoff'schen Sätze

Die Kirchhoffschen Sätze

$$\text{Knotengleichung: } \sum_{\nu=1}^m (\pm) i_{\nu}(t) = 0$$

(siehe Kapitel 2.4)

$$\text{Maschengleichung: } \sum_{\nu=1}^m (\pm) u_{\nu}(t) = 0$$

gelten im eingeschwungenen Zustand auch für Wechselgrößen (kleine Frequenzen und kleine Abmessungen).

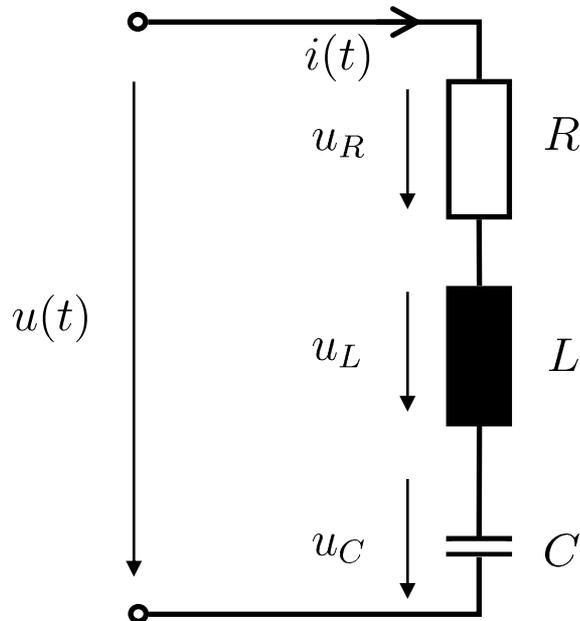
Damit sind auch alle für die Analyse von Gleichstromnetzen bekannten Verfahren auf den Wechselstromfall übertragbar.

Die Anwendung der Knoten- und Maschengleichungen führt jedoch jetzt auf Integro-Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Diese Gleichungen lassen sich für Netzwerke mit sinusförmiger Anregung der Frequenz ω lösen, da nach dem Abklingen aller Einschaltvorgänge alle Ströme und Spannungen selbst wieder sinusförmig mit der Frequenz ω sind.

5.1 Wechselströme

Beispiel: Die RLC-Reihenschaltung



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$
$$= i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

oder $\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}u_R(t) + \frac{d}{dt}u_L(t) + \frac{d}{dt}u_C(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}u(t) = R \frac{d}{dt}i(t) + L \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{1}{C}i(t) \quad \text{???$$

2 Unbekannte



Beispiel: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow \hat{U}\omega \cos(\omega t) = R\hat{I}\omega \cos(\omega t + \varphi) - L\hat{I}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\hat{I}}{C} \sin(\omega t + \varphi) \quad ?$$

Lösung: Komplexe Wechselstromrechnung

5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Definition komplexer Zahlen

Historischer Ursprung: Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ hat zwei reelle Lösungen, die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat jedoch keine (reelle) Lösung. Dieser Mangel kann durch die Einführung komplexer Zahlen beseitigt werden.

Jede komplexe Zahl $\underline{z} \in \mathbb{C}$ lässt sich als Summe einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ und einer imaginären Zahl $jb, b \in \mathbb{R}$ schreiben: $\underline{z} = a + jb$

a wird als Realteil, b als Imaginärteil und j als imaginäre Einheit bezeichnet. Es gilt definitionsgemäß: $j = \sqrt{-1}$.

Man schreibt $a = \text{Re}\{\underline{z}\}$ bzw. $b = \text{Im}\{\underline{z}\}$.

Anmerkungen:

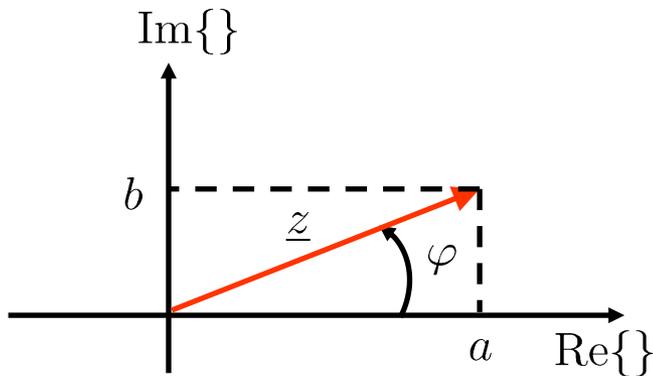
In der Mathematik wird die imaginäre Einheit häufig mit i bezeichnet.

Für $b = 0$ ist $\underline{z} = a$ eine reelle Zahl.

5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Zeigerdarstellung komplexer Zahlen

Komplexen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig Ortsvektoren (Zeigern) in der komplexen (Gaußschen) Zahlenebene zuordnen. Die Rechenregeln für komplexe Zahlen können damit aus einfachen geometrischen Überlegungen gewonnen werden.



Der absolute Betrag von \underline{z} :
 $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ (Satz des Pythagoras).

Darstellung in Polarkoordinaten:
 $a = r \cos(\varphi)$ und $b = r \sin(\varphi)$.

Als Argument $\arg(\underline{z})$ bezeichnet man den Winkel, den der Zeiger einer komplexen Zahl \underline{z} mit der positiven reellen Achse einschließt.

Der Hauptwert des Arguments liegt zwischen $-\pi < \varphi \leq \pi$.

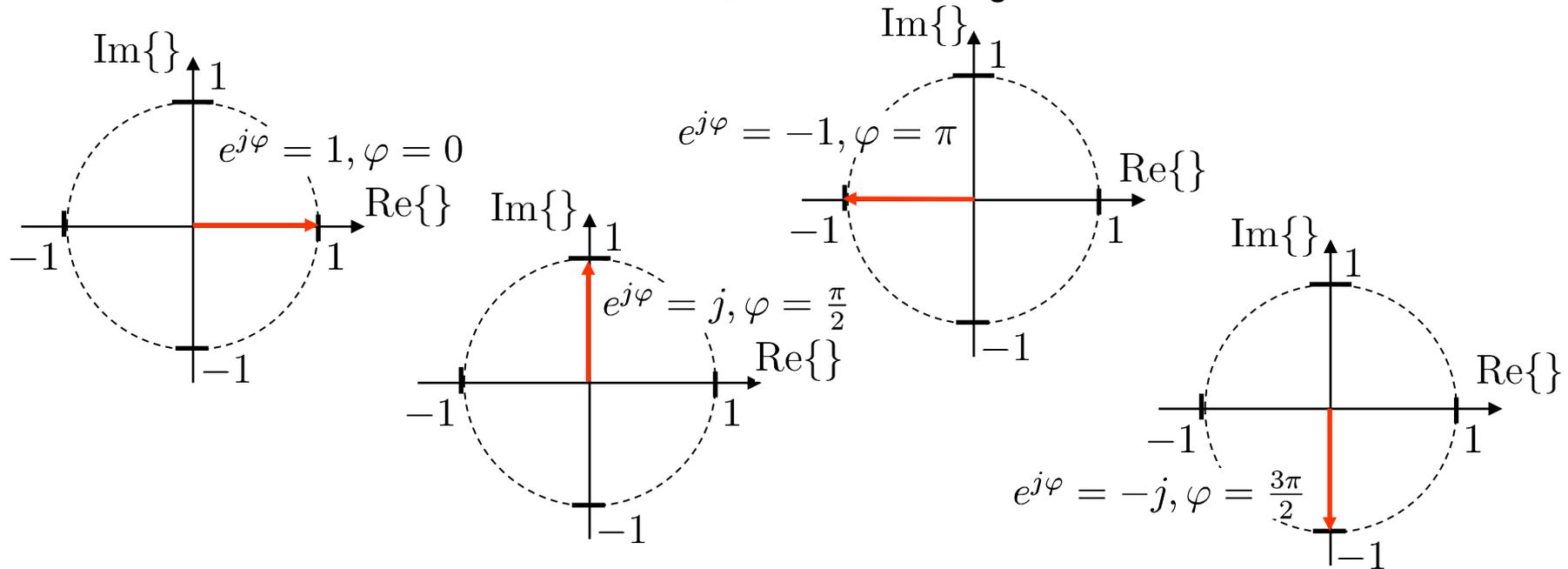
$$\underline{z} = a + jb = r \cos(\varphi) + jr \sin(\varphi) = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = r e^{j\varphi} \quad (\text{Eulersche Formel})$$

5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Der komplexe Drehterm $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$

Jede komplexe Zahl lässt sich als Produkt von reellwertigem Betrag $|\underline{z}| = r$ und komplexem Drehterm $e^{j\varphi}$ schreiben: $\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}$

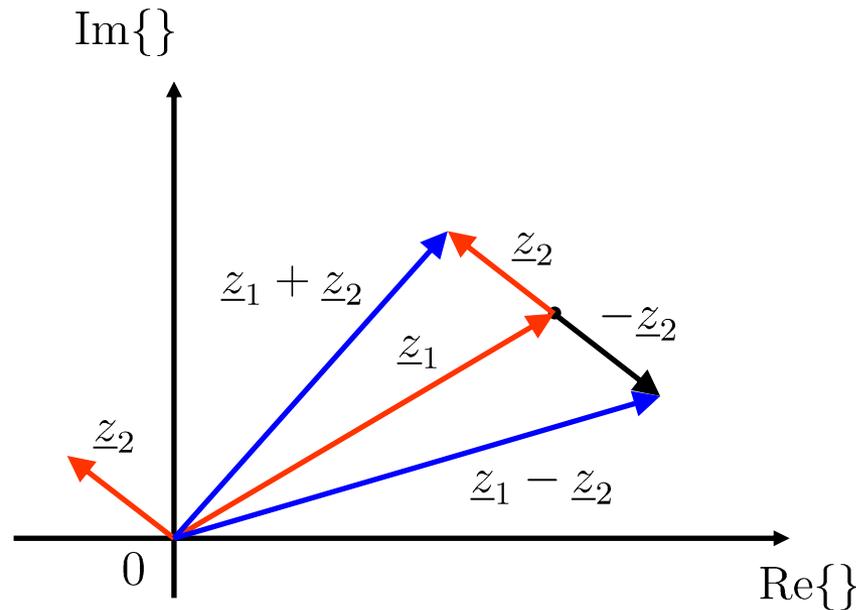
Der komplexe Drehterm hat den Betrag $|e^{j\varphi}| = 1$, in der Zeigerdarstellung liegt er daher immer auf dem Einheitskreis und verleiht \underline{z} seine Richtung:



5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Addition bzw. Subtraktion von komplexen Zahlen

$$\text{Addition: } \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = \underline{z}$$



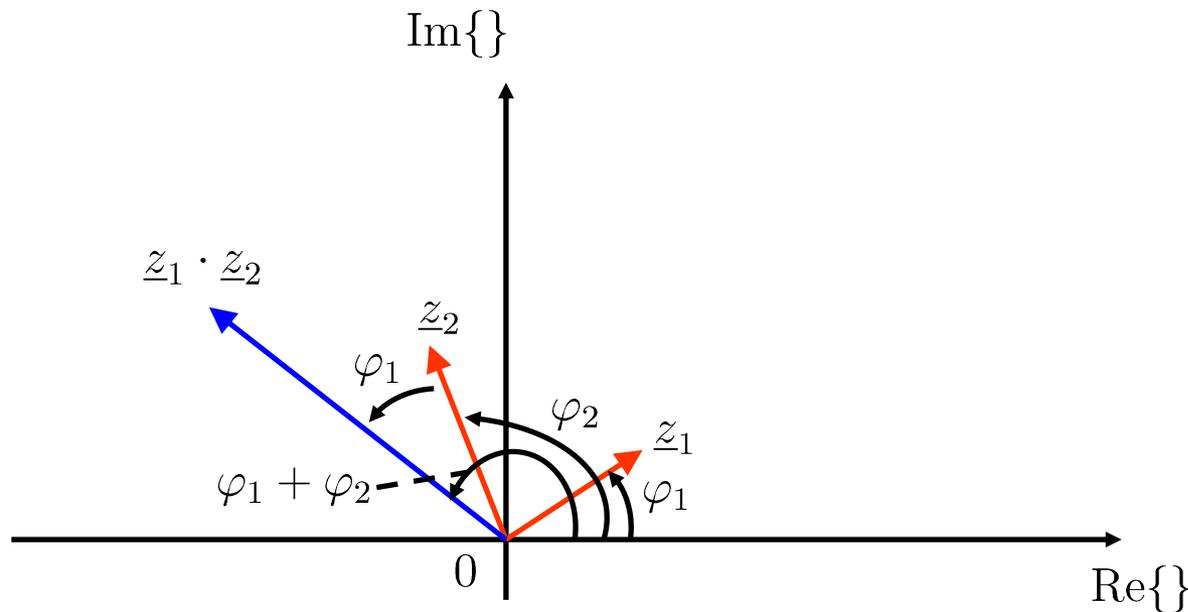
$$\text{Subtraktion: } \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = a_1 + jb_1 - a_2 - jb_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) = \underline{z}$$

5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Multiplikation komplexer Zahlen

Multiplikation: $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2) = \underline{z}$

oder $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1e^{j\varphi_1} \cdot r_2e^{j\varphi_2} = r_1r_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

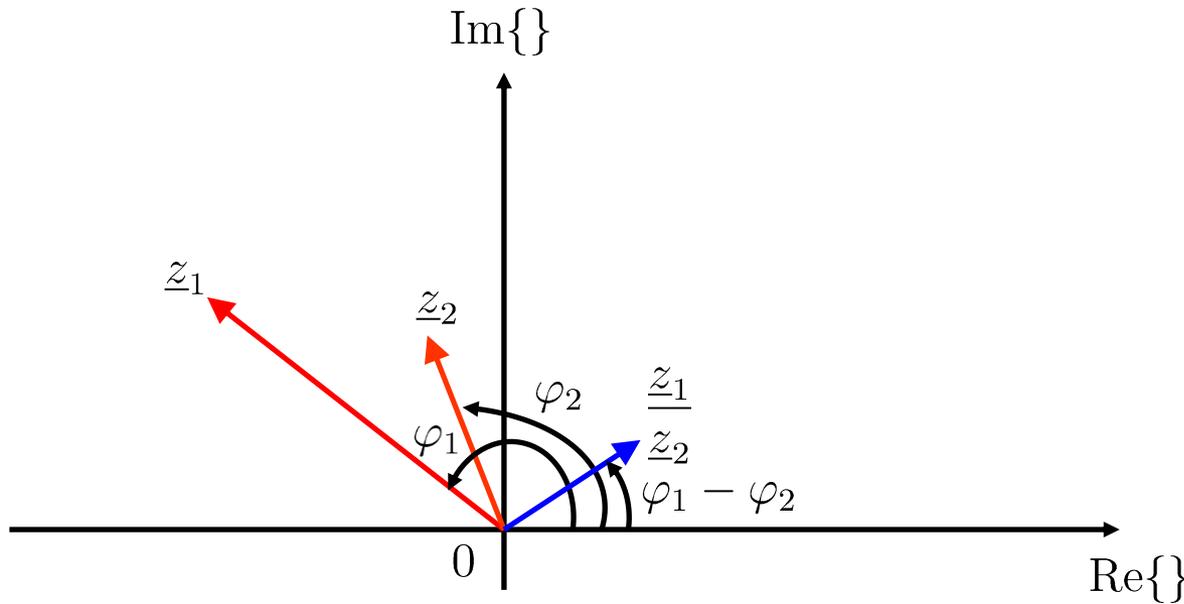


5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Division komplexer Zahlen

$$\text{Division: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

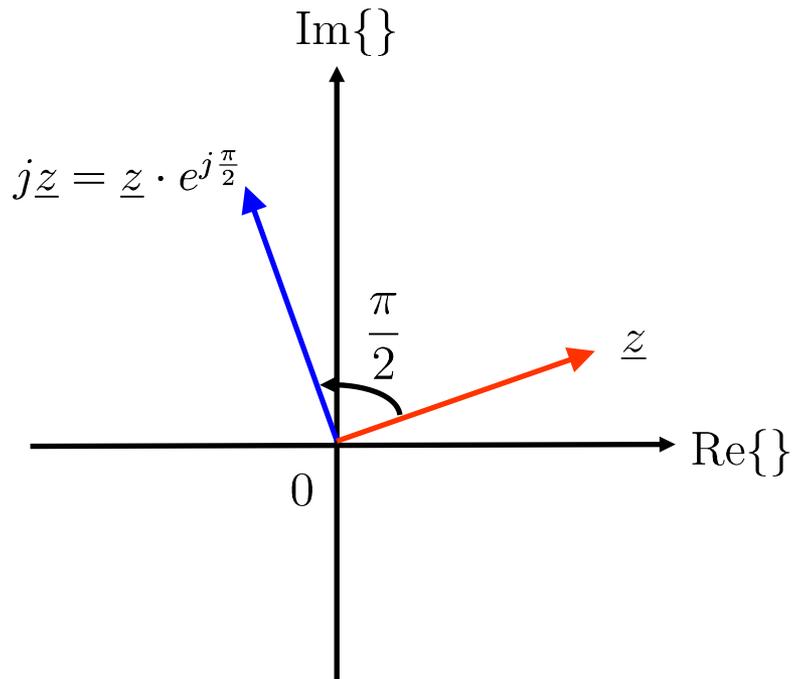
$$\text{oder } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



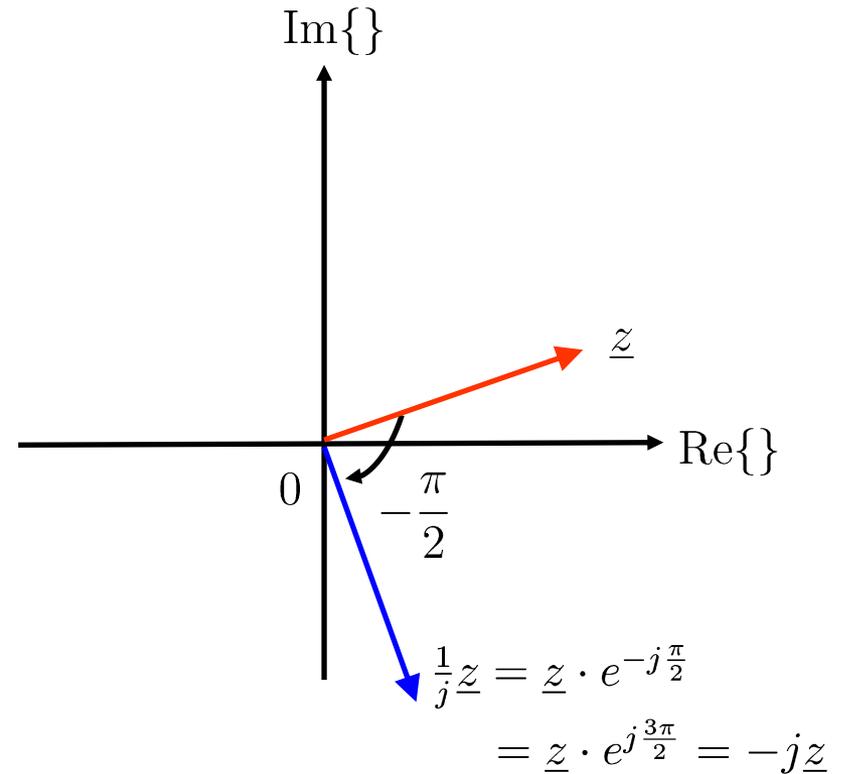
5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Division bzw. Multiplikation einer komplexen Zahl mit j

Multiplikation mit j :



Division durch j :



5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

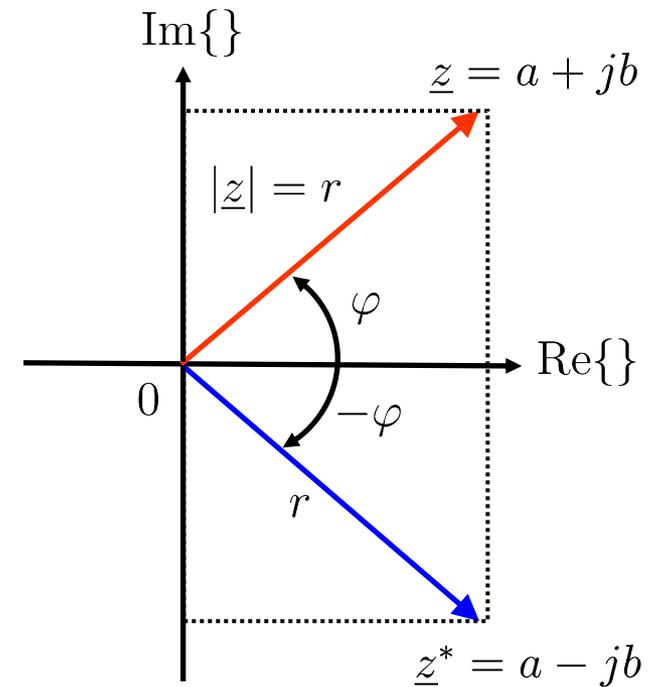
Konjugiert komplexe Zahlen

Zwei komplexe Zahlen heißen zueinander *konjugiert komplex*, wenn sie sich nur durch das Vorzeichen ihres Imaginärteils unterscheiden.

Zur Kennzeichnung einer konjugiert komplexen Zahl wird ein hochgestellter Stern verwendet.

$\underline{z}^* = a - jb$ ist konjugiert komplex zu $\underline{z} = a + jb$

Es gilt: Betrag: $|\underline{z}^*| = |\underline{z}| = r$
Winkel: $\arg(\underline{z}^*) = -\arg(\underline{z}) = -\varphi$



5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Weitere Rechenregeln für komplexe Zahlen

Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen: $\underline{z} = a + jb$

$$(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* + \underline{z}_2^*, \quad (\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* \cdot \underline{z}_2^*$$

$$\underline{z} + \underline{z}^* = 2\operatorname{Re}\{\underline{z}\} = 2a$$

$$\underline{z} - \underline{z}^* = j2\operatorname{Im}\{\underline{z}\} = j2b$$

$$\underline{z} \cdot \underline{z}^* = |\underline{z}|^2 = r^2$$

Betrag: $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = r = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)}$

Argument (Phase): $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ($\pm\pi$ für $a < 0$)

Achtung! Quadranten checken:

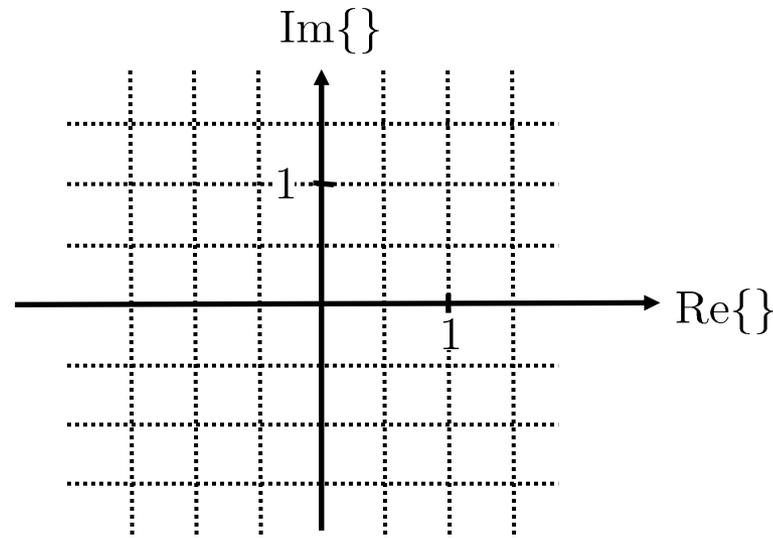
5.2 Tutorial: Komplexe Zahlen

Rechenübung zu komplexen Zahlen

Zeigen Sie: $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$

Zeichnen Sie die Zahlen $z_\nu = e^{j\omega t_\nu}$ für $\omega = 2\pi\frac{1}{s}$ und $t_0 = 0$, $t_1 = 0.25s$, $t_2 = 0.5s$, $t_3 = 0.75s$ und $t_4 = 1s$ als Zeiger in die komplexe Zahlenebene ein.

Geben sie Real- und Imaginärteil dieser Zeiger explizit an.



5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

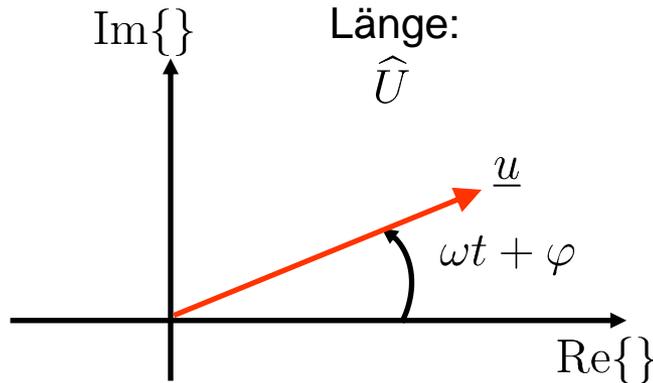
Darstellung im Zeigerdiagramm

Wechselspannung (oder Wechselströme) sind durch die Angabe von Betrag und Phase spezifiziert.

Die Darstellung wird erheblich durch die Verwendung komplexer Zahlen vereinfacht.

$$\underline{u} = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi) + j\hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = u = \text{Re}\{\underline{u}\} = \text{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$$



In Polarkoordinaten erhält man: $\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{U}e^{j\omega t}e^{j\varphi} = \underline{U}e^{j\omega t}$

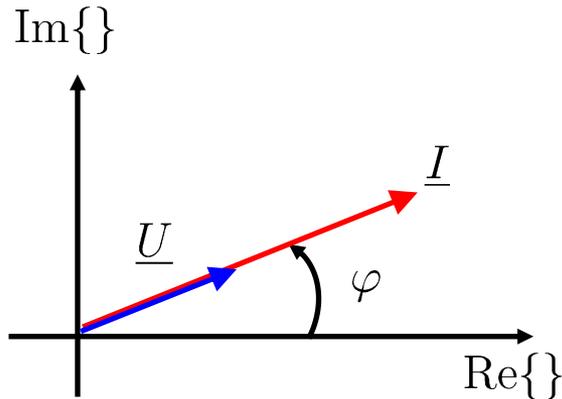
wobei $\underline{U} = \hat{U}e^{j\varphi} = \hat{U} \cos(\varphi) + j\hat{U} \sin(\varphi)$ die komplexe Amplitude bezeichnet.

Der komplexe Drehzeiger $e^{j\omega t}$ ist allen Größen des Netzwerkes gemeinsam und kann daher auch weggelassen werden.

Unter Verwendung der komplexen Amplituden erhält man damit eine von der Zeit unabhängige Zeigerdarstellung, die nur die relativen Phasenwinkel berücksichtigt.

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Ohmscher Widerstand



$$i(t) = \operatorname{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\} \text{ mit } \underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$$

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$$

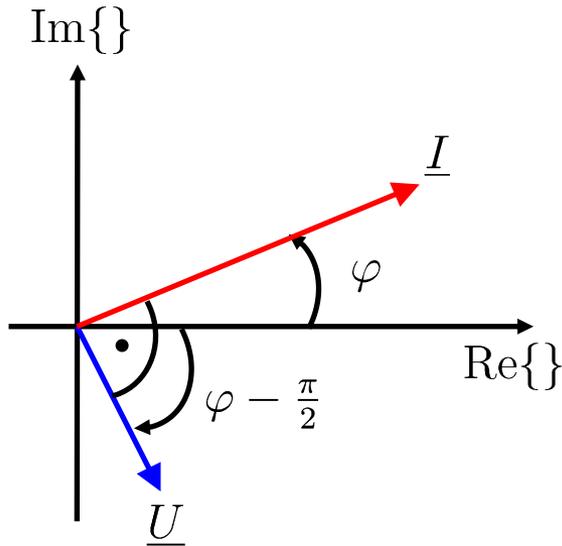
„... Strom und Spannung sind phasensynchron!“

$$\underline{U} = \hat{U}e^{j\varphi} = R\hat{I}e^{j\varphi} = R\underline{I}$$

Für die komplexen Amplituden gilt: $\underline{U} = R\underline{I}$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Idealer Kondensator



$$i(t) = \operatorname{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\} \text{ mit } \underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$$

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$$

„... der Strom eilt um $\frac{\pi}{2}$ voraus!“

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \hat{U} \cdot e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\varphi} \\ &= \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}\end{aligned}$$

Für die komplexen Amplituden gilt: $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

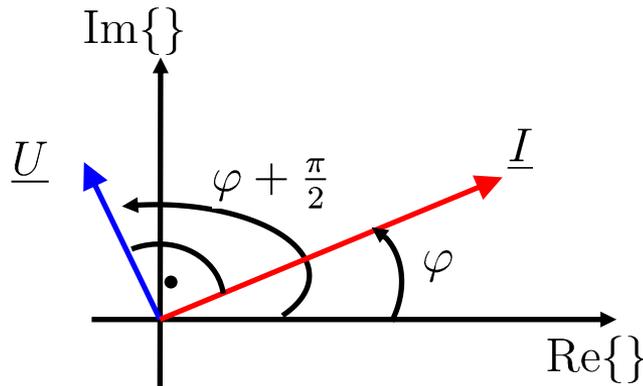
Ideale Spule

$$i(t) = \text{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\} \text{ mit } \underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$$

$$u(t) = \text{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$$

„... der Strom eilt um $\frac{\pi}{2}$ hinterher!“

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \hat{U} \cdot e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\hat{I} \cdot e^{j\varphi}}_{\underline{I}} \\ &= j\omega L \cdot \underline{I}\end{aligned}$$



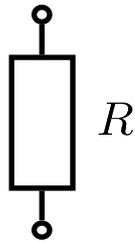
Für die komplexen Amplituden gilt: $\underline{U} = j\omega L \underline{I}$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Verallgemeinerter komplexwertiger Widerstand

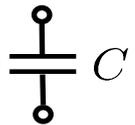
Fazit: In allen Fällen lässt sich der Zusammenhang von Strom und Spannung in einem Gesetz analog zum Ohmschen Gesetz mit einem verallgemeinerten komplexwertigen „Widerstand“ (genannt: Impedanz) fassen:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$



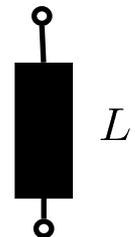
$$\underline{U} = \underline{R} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z} = R$$



$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$



$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{Z} = j\omega L$$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Impedanz und Admittanz

$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j \arg(\underline{Z})}$ wird Impedanz oder Scheinwiderstand genannt.

Der Real- und der Imaginärteil werden als

R : Resistanz, Wirkwiderstand

X : Reaktanz, Blindwiderstand

bezeichnet.

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ wird Admittanz oder Scheinleitwert genannt.

Der Real- und der Imaginärteil werden als

$\underline{Y} = G + jB$ mit

G : Konduktanz, Wirkleitwert

B : Suszeptanz, Blindleitwert

bezeichnet.

Die Kirchhoffschen Gleichungen gelten auch für die komplexen Amplituden.

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Kirchhoff'sche Sätze für komplexe Amplituden

Maschengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm) \underline{U}_{\nu} \stackrel{!}{=} 0$$

Beweis:

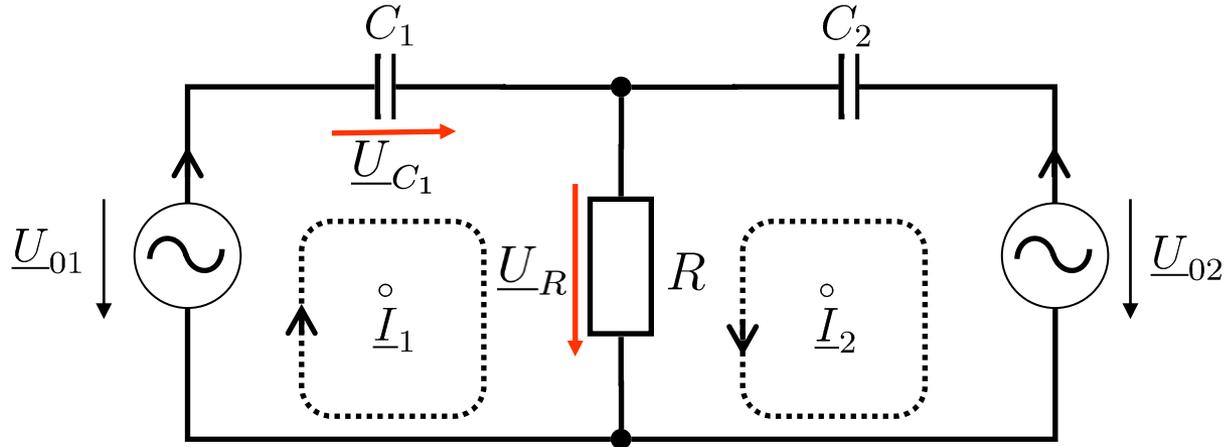
Knotengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m (\pm) \underline{I}_{\nu} \stackrel{!}{=} 0$$

Beweis entsprechend.

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Maschenstromverfahren



$$\omega = 1000 \frac{1}{s}, C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F} = 1 \frac{\mu\text{As}}{\text{V}}, R = 1 \text{k}\Omega = 1 \text{k} \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

$$\underline{U}_{01} = \underline{U}_{02} = \underline{U}_0 = 1\text{V}$$

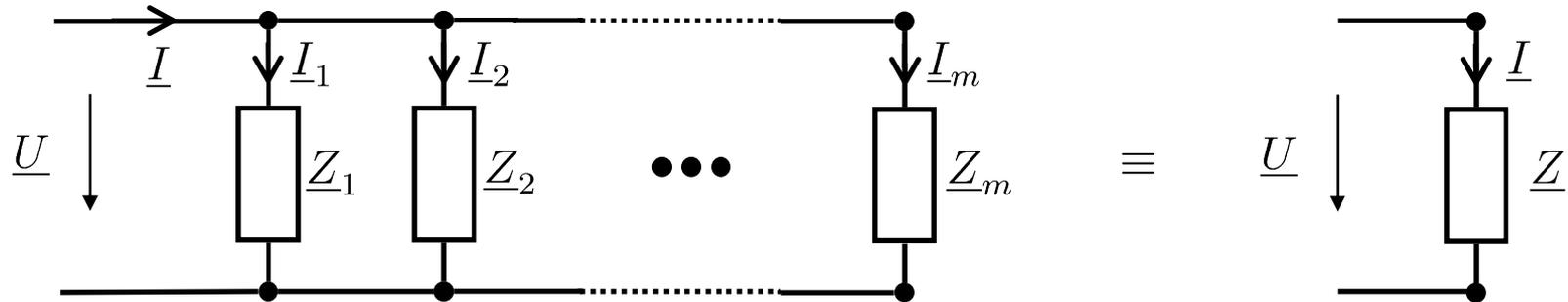
(reellwertig, d.h. Phase = 0)

Geben Sie an: \underline{U}_R , \underline{U}_{C_1}
 $u_R(t)$, $u_{C_1}(t)$

Ansatz:

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Parallelschaltung von Impedanzen



Anwendung des 1. Kirchhoffschen Satzes :

$$\underline{I} =$$

=

Admittanzen:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\underline{Z}_{\nu}}$$

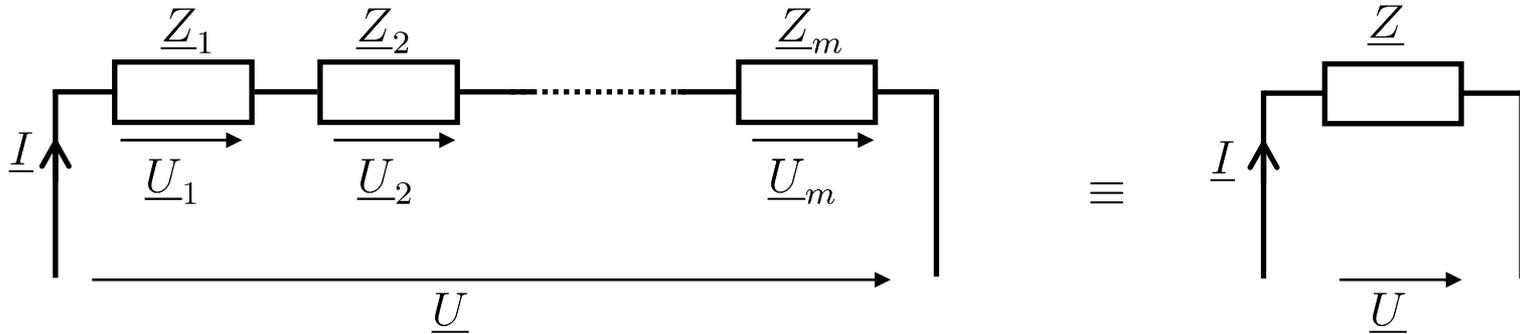
oder

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m \underline{Y}_{\nu}$$

mit $\underline{Z}_{\nu} = \frac{1}{\underline{Y}_{\nu}}$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Reihenschaltung von Impedanzen



Anwendung des 2. Kirchhoffschen Satzes:

$$\underline{U} =$$

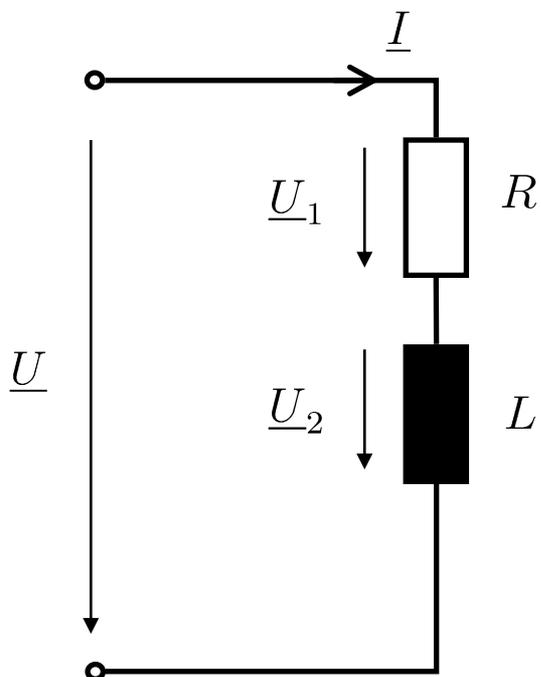
=

=

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_{\nu=1}^m \underline{Z}_{\nu}$$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Die RL-Reihenschaltung



$$\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L$$

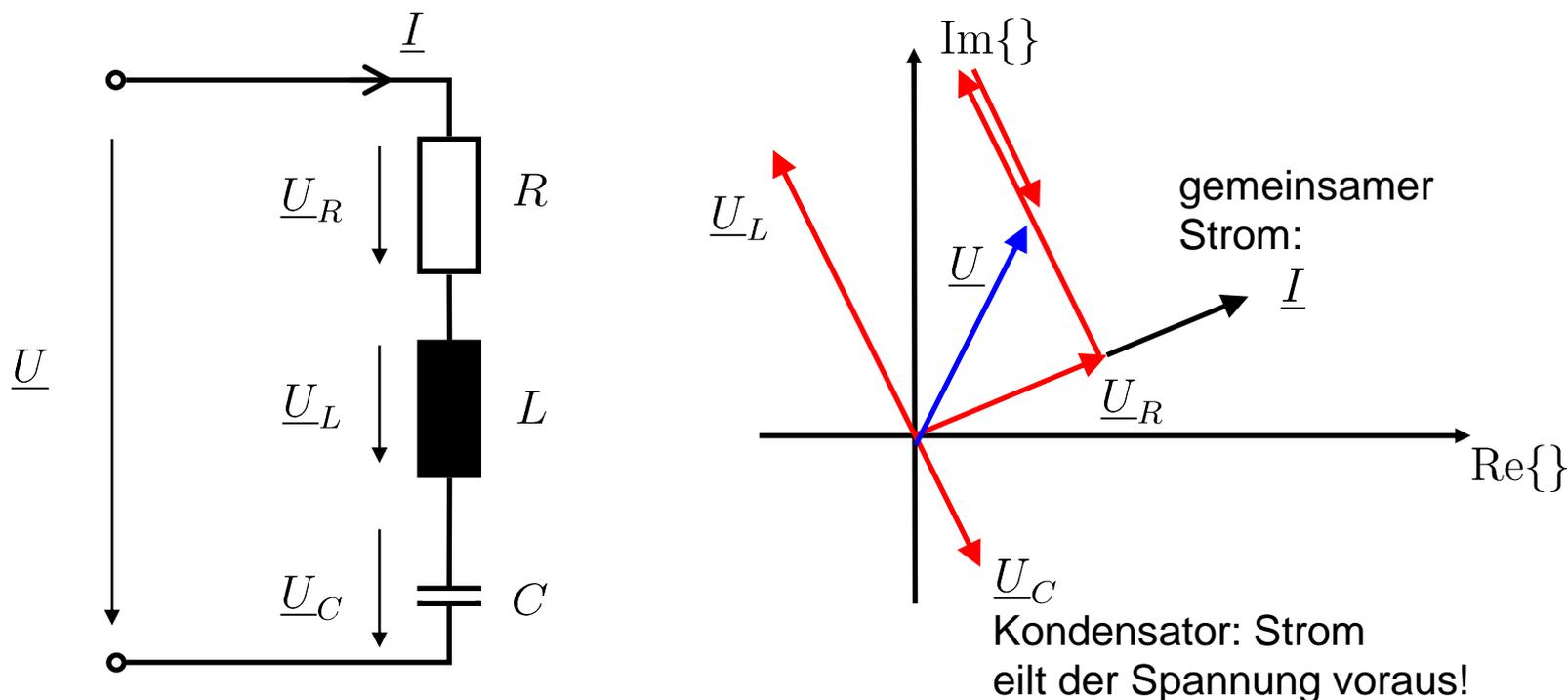
$$\underline{U}_1 = \hat{U}_1 \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{R}{R + j\omega L} \underline{U} \Rightarrow u_1(t) = \text{Re}\{\underline{U}_1 e^{j\omega t}\}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \underline{U} \Rightarrow u_2(t) = \text{Re}\{\underline{U}_2 e^{j\omega t}\}$$

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Die RLC-Reihenschaltung



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Erinnern Sie sich noch an das Beispiel der RLC-Reihenschaltung aus Kapitel 5.1?
Die ist mit der komplexen Wechselstromrechnung nun für Sie lösbar!

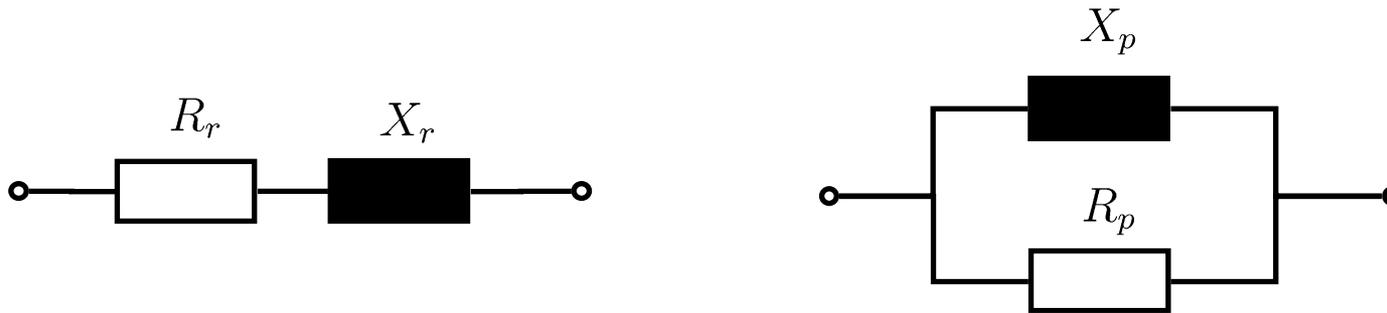


5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Umwandlung von Reihen- und Parallelschaltung

Jede aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand bestehende Reihenschaltung kann in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung umgewandelt werden (und umgekehrt).

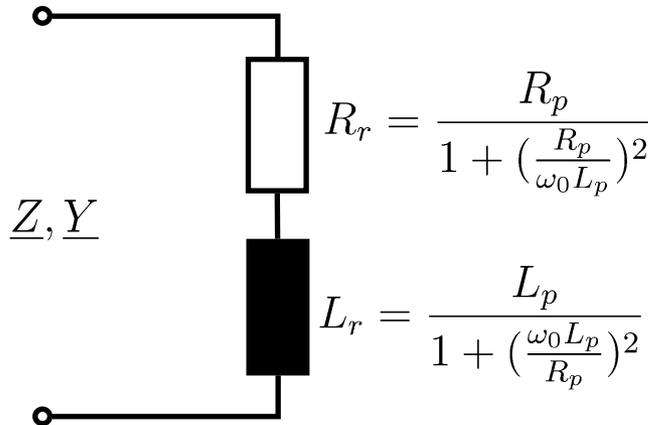
Beispiel:



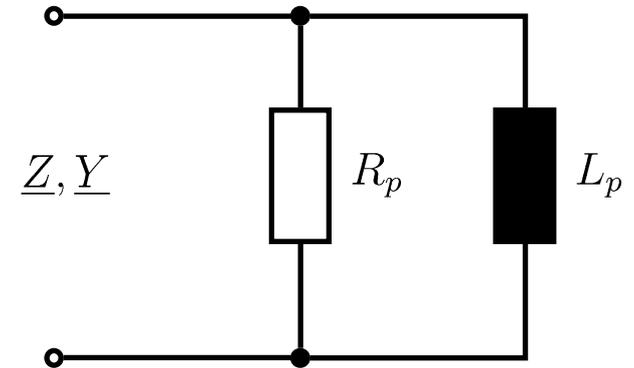
Die Äquivalenz beider Schaltungen gilt i.a. jedoch nur für genau 1 Frequenz!

5.3 Komplexe Berechnung von Netzwerken

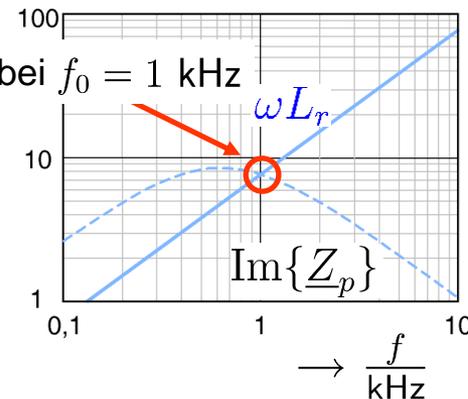
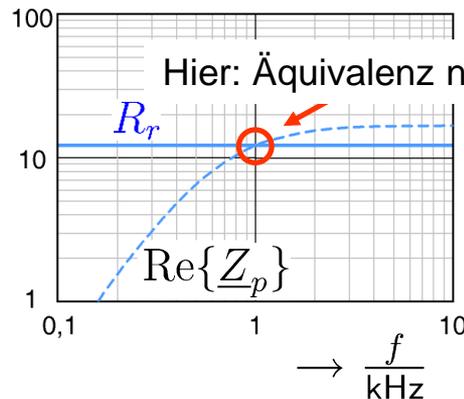
Beispiel: Reihen- und Parallelschaltung bei induktivem Blindanteil



$$\underline{Z} = R_r + jX_r = R_r + j\omega_0 L_r$$



$$R_p = R_r + \frac{(\omega_0 L_r)^2}{R_r} \quad L_p = L_r + \frac{R_r^2}{\omega_0^2 L_r}$$



Frequenzabhängigkeit der Impedanz bei Reihenschaltung und äquivalenter Parallelschaltung

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Frequenzabhängigkeit und Ortskurve

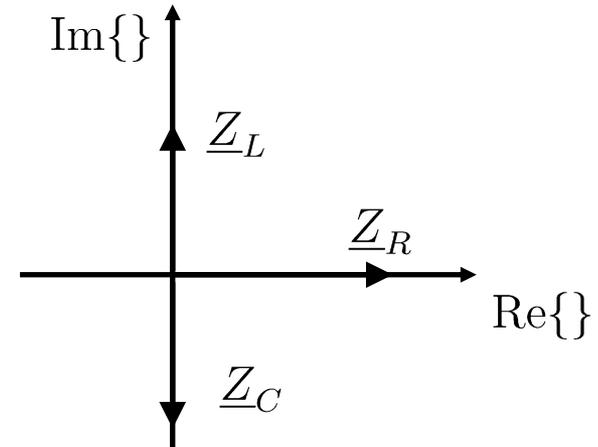
Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes:

Ohmscher Widerstand: $\underline{Z}_R(\omega) = R$

Induktiver Widerstand: $\underline{Z}_L(\omega) = j\omega L$

Kapazitiver Widerstand: $\underline{Z}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C}$

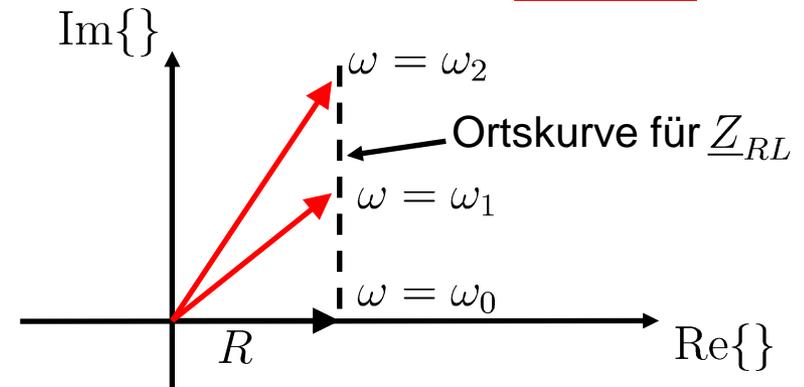
Darstellung im Zeigerdiagramm:



Ortskurven:

Der Wert des komplexen Widerstands wird in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz ω als Parameter aufgetragen. Die resultierende Kurve wird als Ortskurve bezeichnet.

Beispiel: $\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L$
 $= \underline{Z}_R + \underline{Z}_L(\omega)$



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Übertragungsfunktion eines Netzwerks

Mit diesen Bauelementen lassen sich Schaltungen (z.B. Spannungsteiler) mit speziellen frequenzselektiven Eigenschaften (Filter) aufbauen.

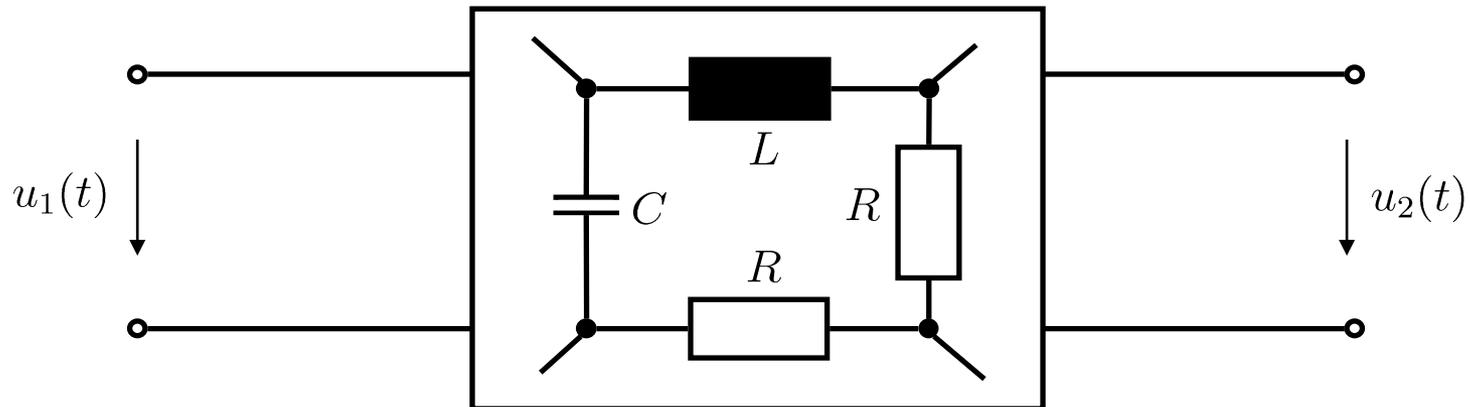
Das Übertragungsverhalten einer Schaltung wird im eingeschwungenen Zustand durch den sog. Frequenzgang $\underline{H}(\omega)$ oder durch Ortskurven charakterisiert.

$$\underline{H}(\omega) = |\underline{H}(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \underline{H}(j\omega)$$

eine Funktion der Kreisfrequenz ω
bzw. immer auch von $j\omega$!

Betrag des Frequenzgangs: $|\underline{H}(\omega)|$

Phase des Frequenzgangs: $\varphi(\omega)$



passives Zweitor = passiver Vierpol (passiv = keine Quellen!)

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Einige Eigenschaften linearer Netzwerke

Falls die Eingangsspannung $u_1(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ist, dann ist die Ausgangsspannung $u_2(t)$ im eingeschwungenen Zustand ebenfalls ein sinusförmiges Signal der gleichen Frequenz.

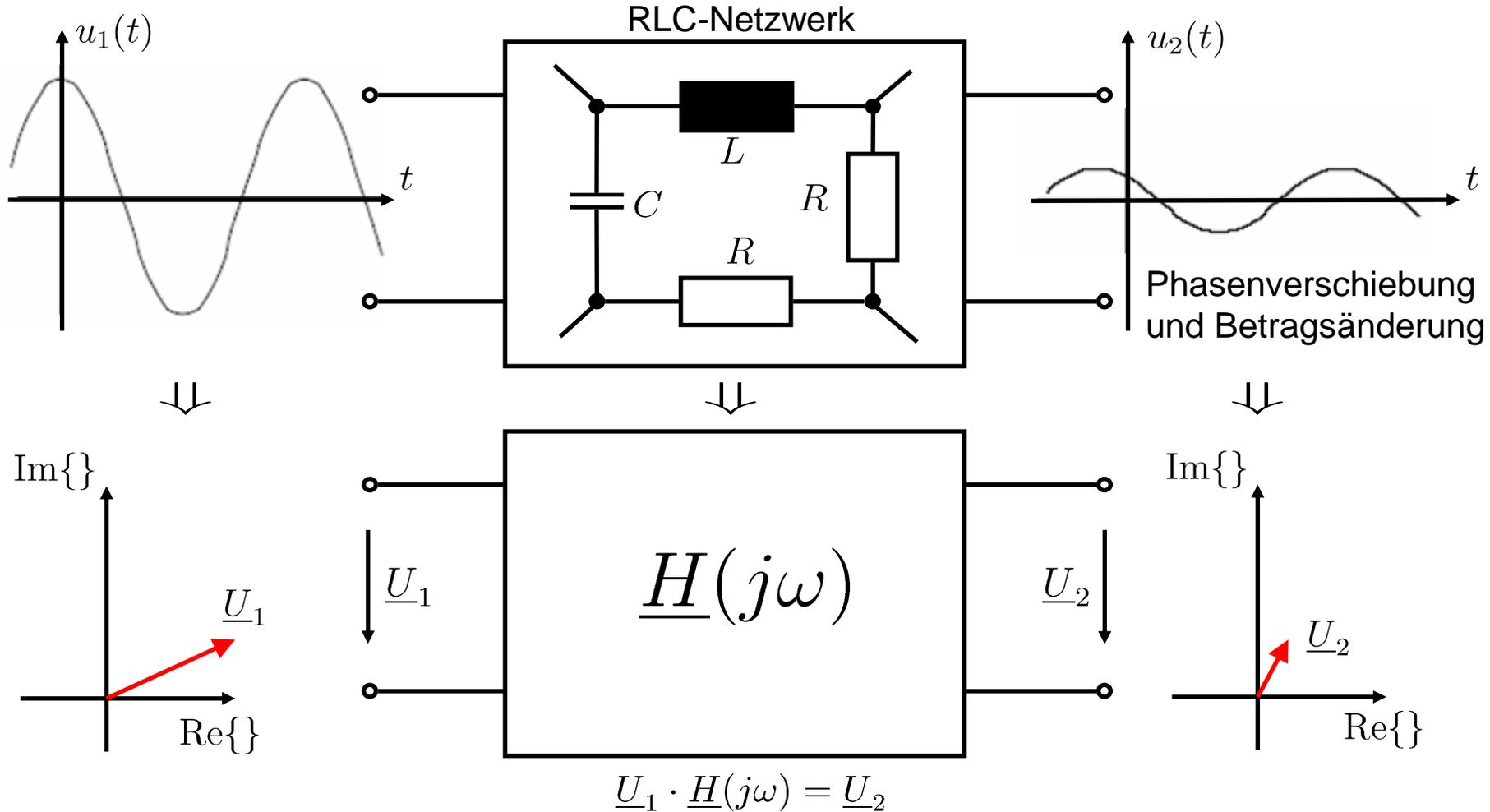
Das Verhältnis der komplexen Amplituden von Ausgangs- zu Eingangsspannung wird als Frequenzgang definiert. Der Frequenzgang eines linearen Netzwerkes aus konzentrierten Elementen ist eine rationale Funktion von $j\omega$ (bzw. von ω)

Frequenzgang:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)} = \underline{H}(j\omega) \Leftrightarrow \underline{U}_2 = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{U}_1$$

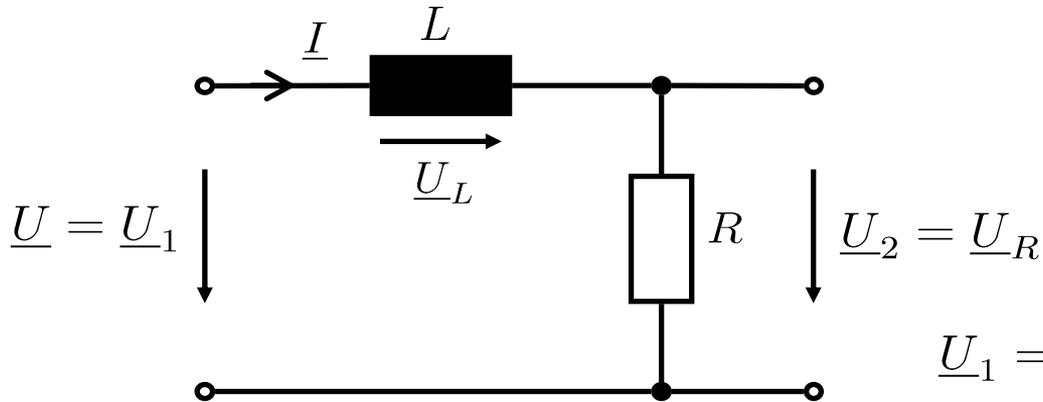
5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Beschreibung durch die Übertragungsfunktion



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Der LR-Spannungsteiler (Tiefpassfilter)



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = ?$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_L + \underline{U}_2 \\ &= j\omega L \cdot \underline{I} + R \cdot \underline{I} \\ &= (R + j\omega L) \cdot \underline{I}\end{aligned}$$

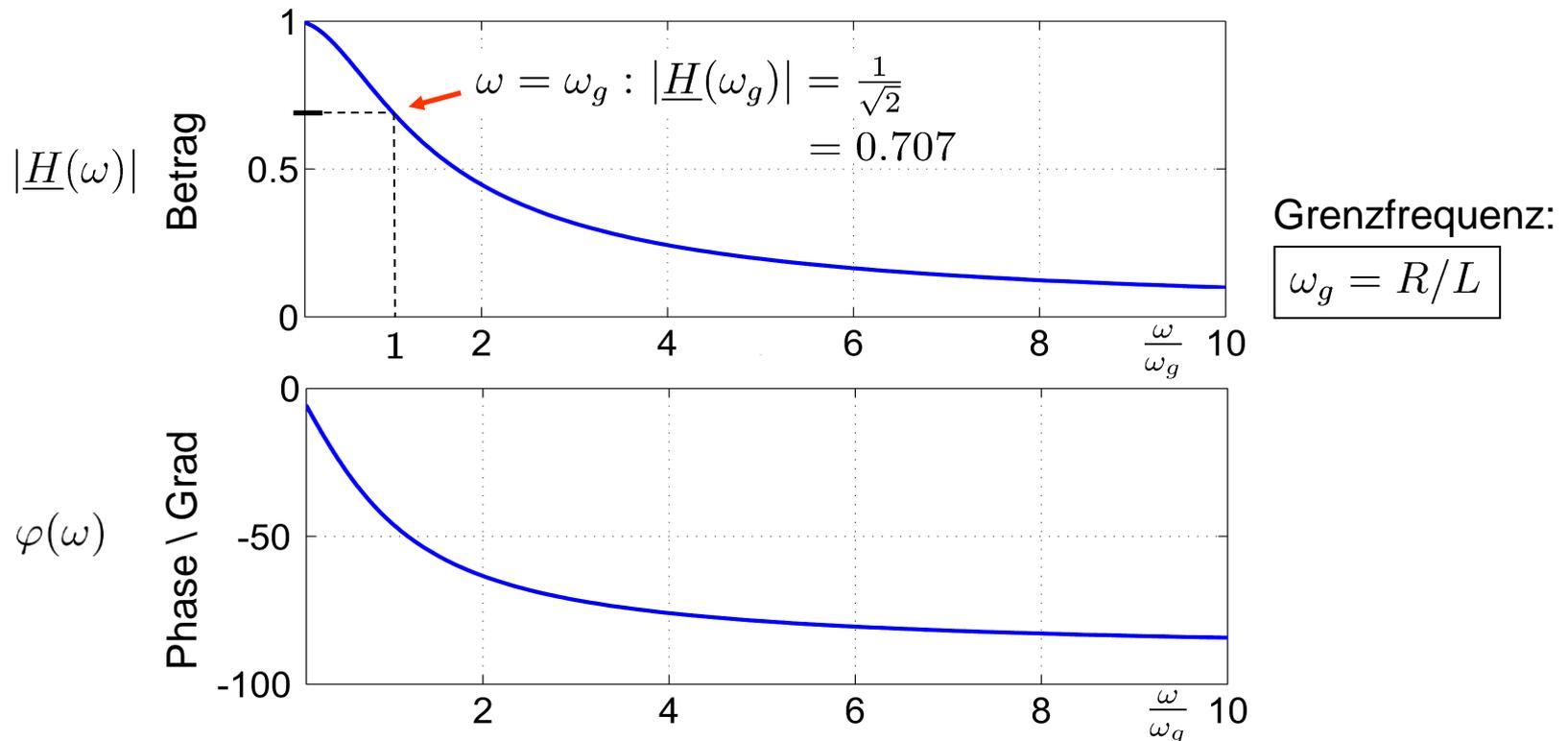
5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Frequenzgang des LR-Spannungsteilers

Das Übertragungsverhalten des Spannungsteilers wird durch den Frequenzgang

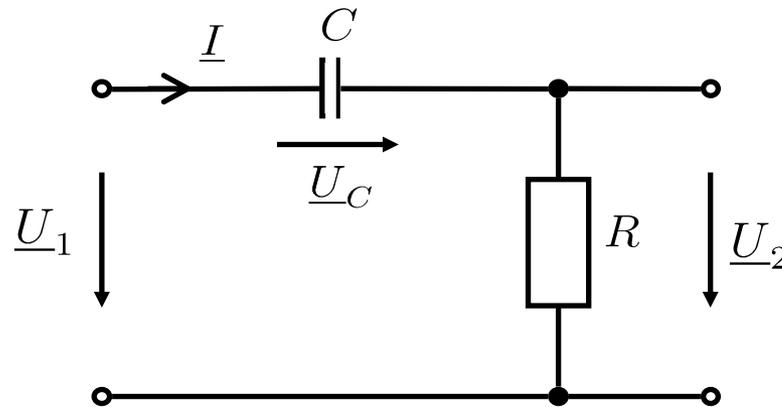
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_R(\omega)}{\underline{U}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} \text{ charakterisiert.}$$

Der LR-Spannungsteiler hat das Übertragungsverhalten eines Tiefpassfilters.



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Der CR-Spannungsteiler (Hochpassfilter)



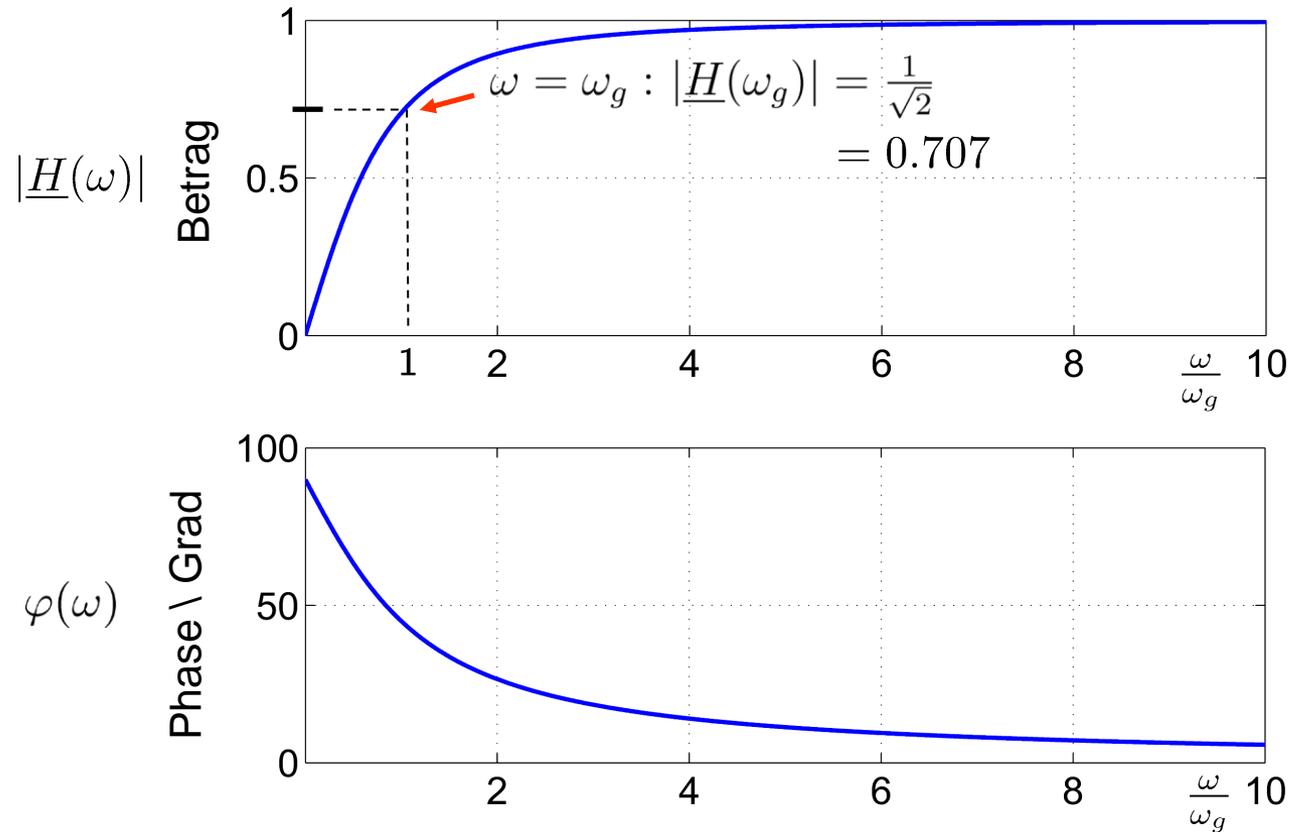
$\underline{U}_2 =$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_C + \underline{U}_2 \\ &= \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} + R \cdot \underline{I} \\ &= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \underline{I}\end{aligned}$$

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Frequenzgang des CR-Spannungsteilers

Der CR-Spannungsteiler hat das Übertragungsverhalten eines Hochpassfilters.

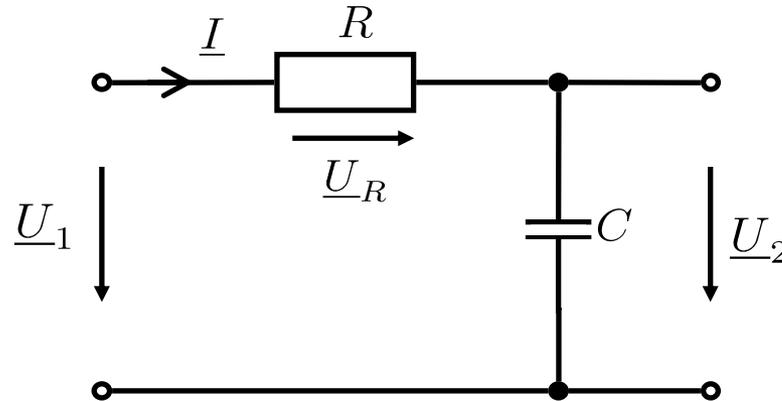


Grenzfrequenz:

$$\omega_g = 1/(RC)$$

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Der RC-Spannungsteiler (Tiefpassfilter)



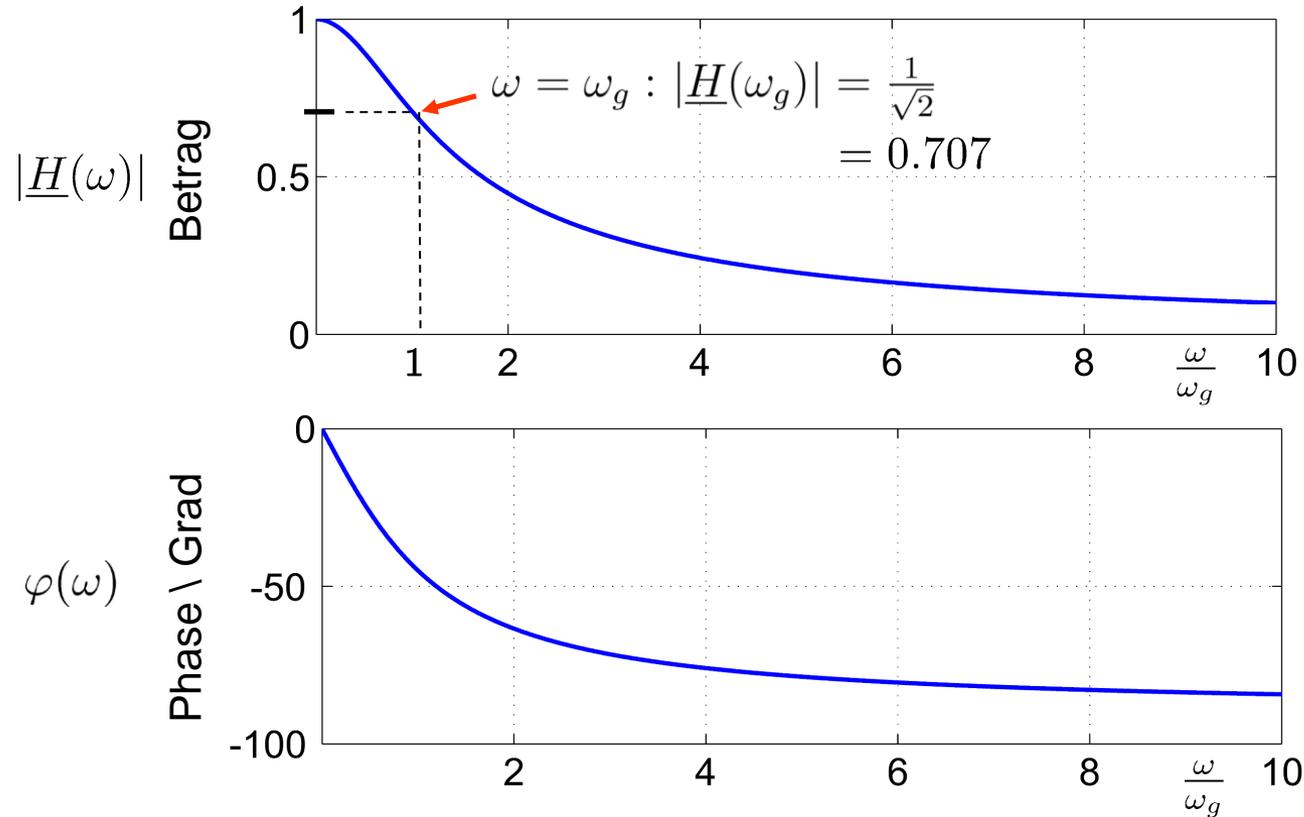
$$\underline{U}_2 =$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_R + \underline{U}_2 \\ &= R \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} \\ &= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \underline{I}\end{aligned}$$

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

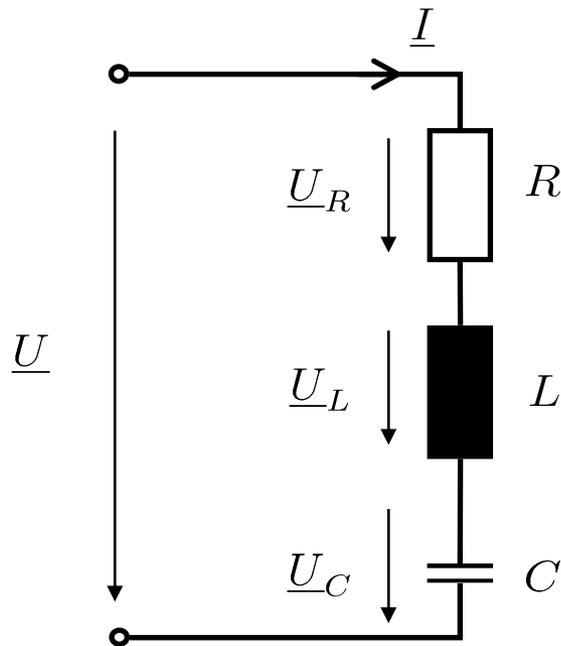
Frequenzgang des RC-Spannungsteilers

Der RC-Spannungsteiler hat das Übertragungsverhalten eines Tiefpassfilters.



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Der Reihenschwingkreis



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$|\underline{Y}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \text{Betrag von } \underline{Y}$$

Ein Maximum wird für $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ erreicht.

$|\underline{Y}|$ wird also für $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ maximal.

ω_0 wird als Resonanzfrequenz bezeichnet.

$$|\underline{Y}(\omega = \omega_0)| = \frac{1}{R} \quad (\text{rein reell}).$$

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Analyse des Reihenschwingkreises (I)

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0 L - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0 C}\right)} \quad \text{mit} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Normierter

Scheinleitwert: $R\underline{Y} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ wobei die Güte des Schwingkreises sich zu

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{ergibt}$$

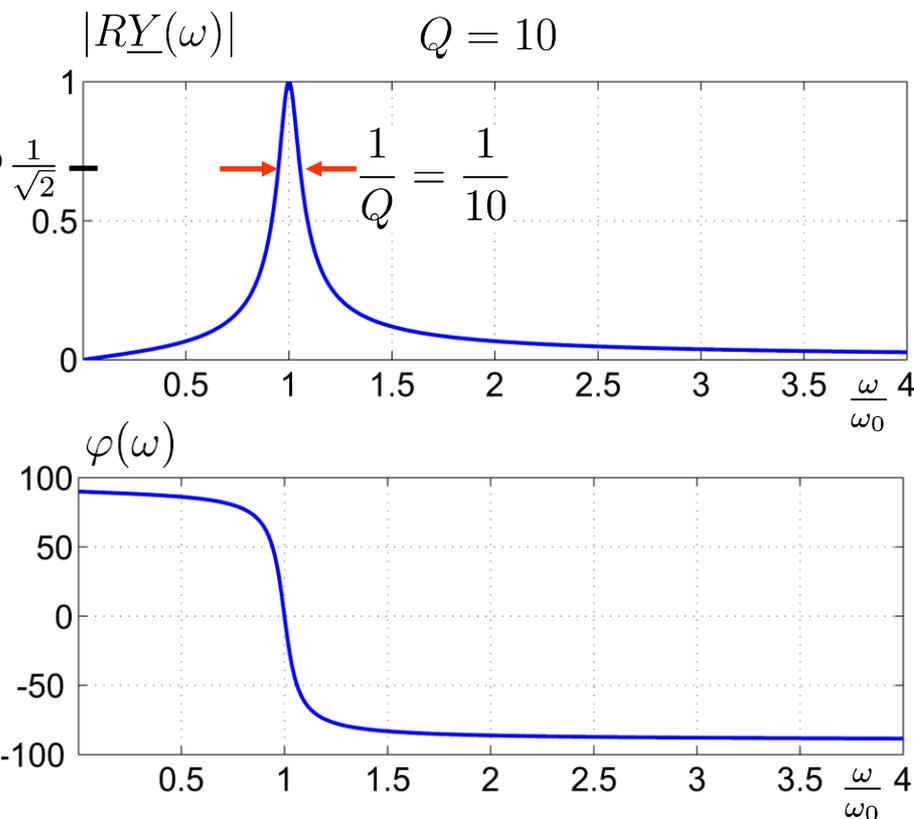
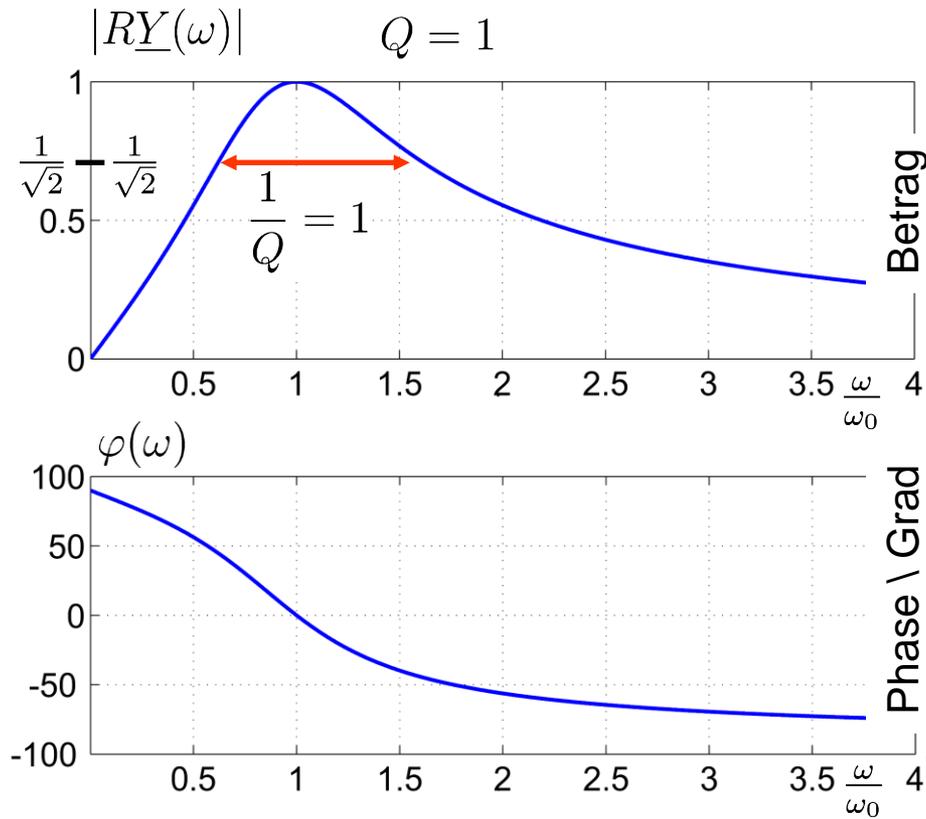
...

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Analyse des Reihenschwingkreises (II) - Scheinleitwert

Der Reihenschwingkreis zeigt das Verhalten eines Bandpassfilters.

Betrag und Phase des normierten Scheinleitwertes $R\underline{Y}$ für $Q = 1$ und $Q = 10$:



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Analyse des Reihenschwingkreises (III)

Spannungen an den Netzwerkelementen des Schwingkreises:

Spannung \underline{U}_C am Kondensator:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\frac{-j}{\omega RC}}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\frac{-j\omega_0}{\omega} Q}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Spannung \underline{U}_L an der Spule:

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\frac{j\omega_0}{\omega} Q}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Im Resonanzfall gilt: $\underline{U}_C = -jQU$ bzw. $\underline{U}_L = jQU \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_R$

Im Resonanzfall kann die Spannung an dem Kondensator oder der Spule sehr viel größer werden als die Eingangsspannung \underline{U} .

Schwingkreise haben zahlreiche Anwendungen (Erzeugung von elektrischen Schwingungen und elektromagnetischen Wellen, Mechanik, Akustik) und treten zudem häufig auch als parasitärer Nebeneffekt auf.

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Das Bode-Diagramm

Darstellung des Frequenzgangs als Amplitudengang und als Phasengang über einer logarithmischen Frequenzskala ω .

Amplitudengang: $A(\omega) = 20 \log (|\underline{H}(j\omega)|) \text{ [dB] (Dezibel)}$

Bode-Diagramm

Phasengang: $\varphi(\omega) = \arg (\underline{H}(j\omega))$

Anmerkung: Die (Pseudo-) Einheit Bel wird für logarithmierte Leistungsverhältnisse verwendet:

$$P = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \text{ [Bel]} \Rightarrow P = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \text{ [Dezibel]} \Rightarrow P = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ [dB]}$$

Beispiel: An einem Widerstand bei einer Spannung U umgesetzte Leistung bezogen auf die Leistung bei einer Referenzspannung U_0 :

$$P_R = 10 \lg \frac{RU^2}{RU_0^2} \text{ dB} = 10 \lg \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \text{ dB} = 20 \lg \left(\frac{U}{U_0} \right) \text{ dB}$$

Vorteil des Bode-Diagramms: Die Darstellung im logarithmischen Bereich überführt Produkte in Summen. Daher ist eine einfache grafische Konstruktion des Frequenzgangs im Bode-Diagramm möglich.

5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

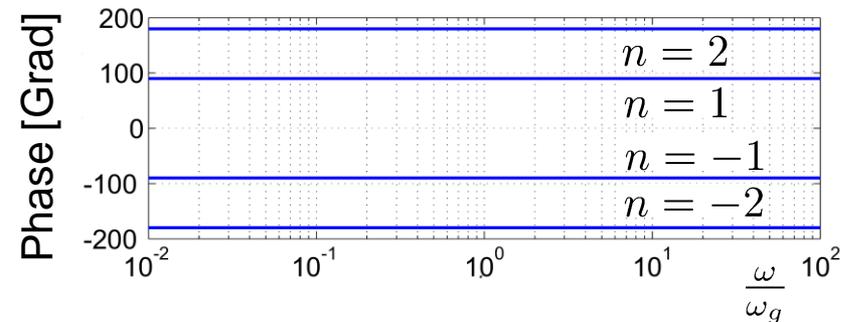
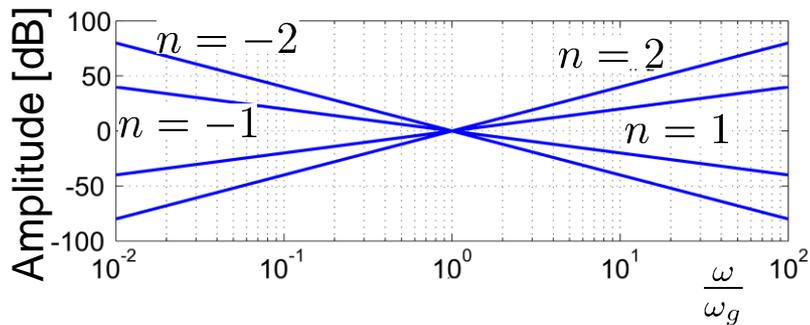
Bode-Diagramm: Fall 1

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_g}\right)^{\pm n} = \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{\pm n} \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{2}n}$$

$$A(\omega) = \pm n \cdot 20 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$$

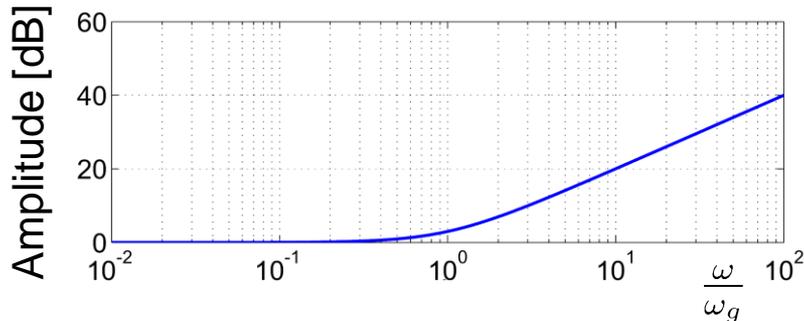


5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

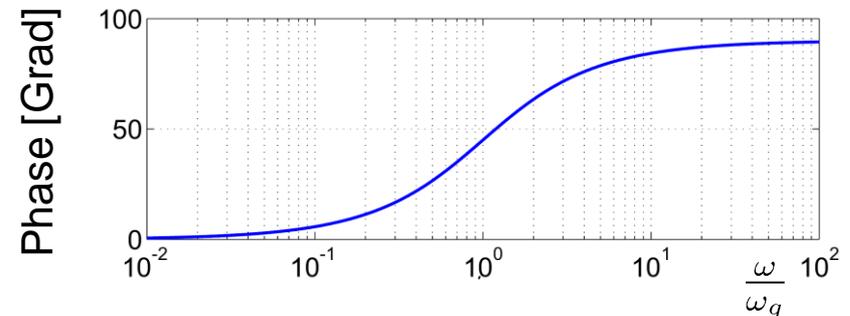
Bode-Diagramm: Fall 2

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_g}$$

$$A(\omega) = 20 \lg \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2} \right)$$



$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)$$



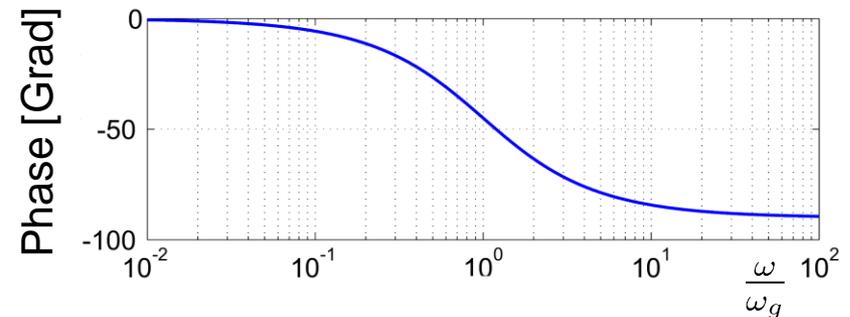
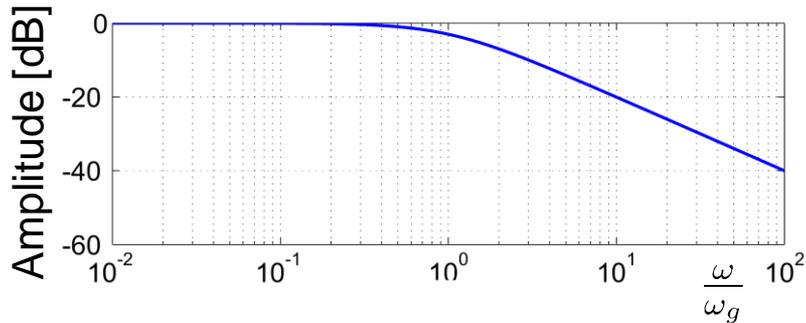
5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Bode-Diagramm: Fall 3

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_g}}$$

$$A(\omega) = 20 \lg \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)$$



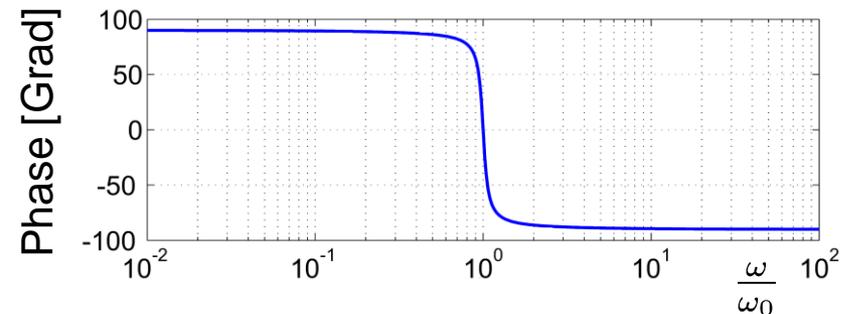
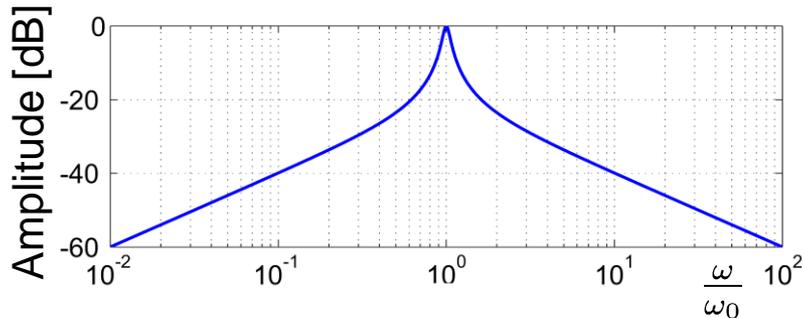
5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Bode-Diagramm: Fall 4

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right)} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j\omega}{\omega_0} + Q}$$

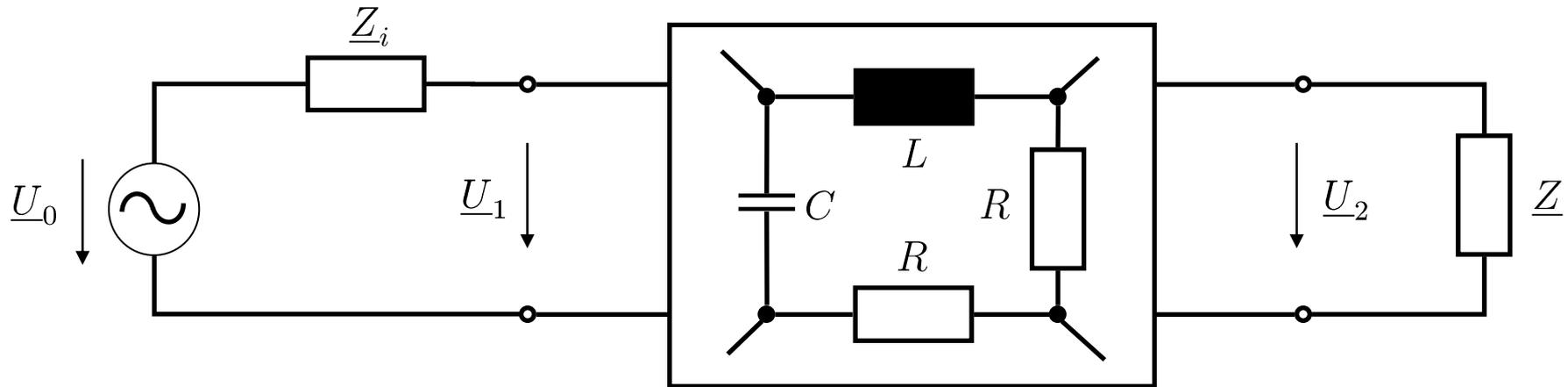
$$A(\omega) = 20 \lg \left(\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$



5.4 Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften

Belastete Zweitore



Der Innenwiderstand der (realen) Spannungsquelle \underline{Z}_i und die Lastimpedanz \underline{Z} müssen in die Berechnung des Frequenzgangs mit einbezogen werden, es sei denn, diese Elemente sind durch weitere schaltungstechnische Maßnahmen entkoppelt.

6. SIGNALE UND SYSTEME: DIE FOURIER-TRANSFORMATION

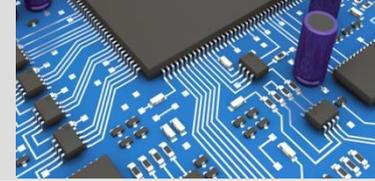
Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

- 6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie
- 6.2 Die Fourier-Transformation



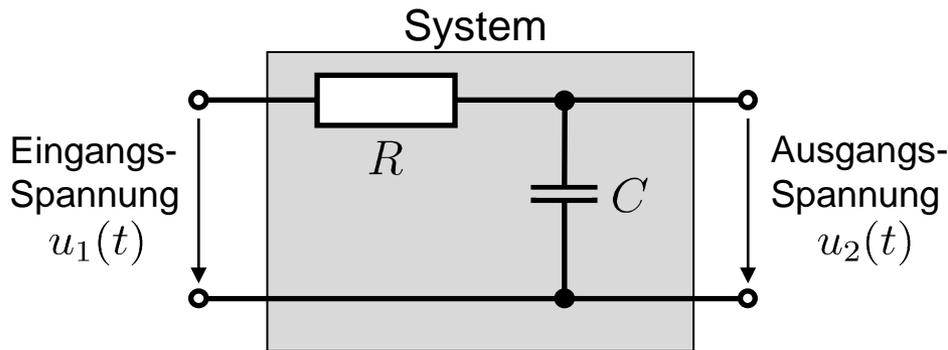
6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Was ist ein System und wie stellen wir es dar?

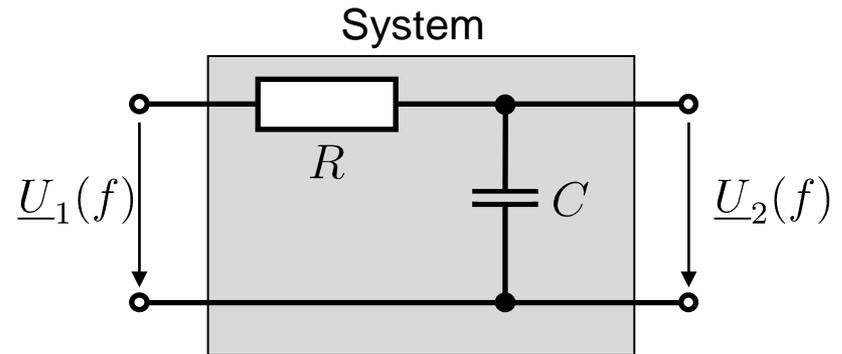


Ein **System** ist die Abstraktion eines Teils der physikalischen oder technischen Welt.

Beispiel: Nachfolgende elektrische Schaltung mit Widerstand R und Kondensator C :



Signaldarstellung als Funktion der Zeit t
(Darstellung im „Zeitbereich“)



Signaldarstellung als Funktion der Frequenz f
(Darstellung im „Frequenzbereich“)

Abstraktion im **Zeitbereich** ...

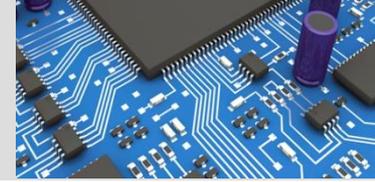


Abstraktion im **Frequenzbereich**:



6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Systemtheorie



Unterschiedliche physikalische Anordnungen zeigen gleiches Verhalten.
(Elektrotechnik, Mechanik).

Die Systemtheorie behandelt grundlegende Eigenschaften von Systemen, losgelöst von der tatsächlichen Realisierung des Systems.

Das Ziel ist die Modellierung realer Systeme, die Analyse, der Entwurf, die Prädiktion, die Regelung.

Wichtige Eigenschaften von Systemen sind z.B.:

- Linearität
- Zeitinvarianz
- Stabilität
- Invertierbarkeit

Darüber hinaus ist die Art der Zeitbasis von Bedeutung: Wir unterscheiden zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme. In dieser Vorlesung: Lediglich Betrachtung zeitkontinuierlicher Systeme (Variable t).

6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Was ist ein Signal und wie stellen wir es dar?



Signale sind Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variablen: Häufig sind sie eine Funktion der Zeit $s(t)$, manchmal auch des Ortes $s(x)$, oder zweier Ortskoordinaten $s(x, y)$ (z.B. Bild), manchmal auf von Ort und Zeit $s(x, y, t)$ (z.B. Video).

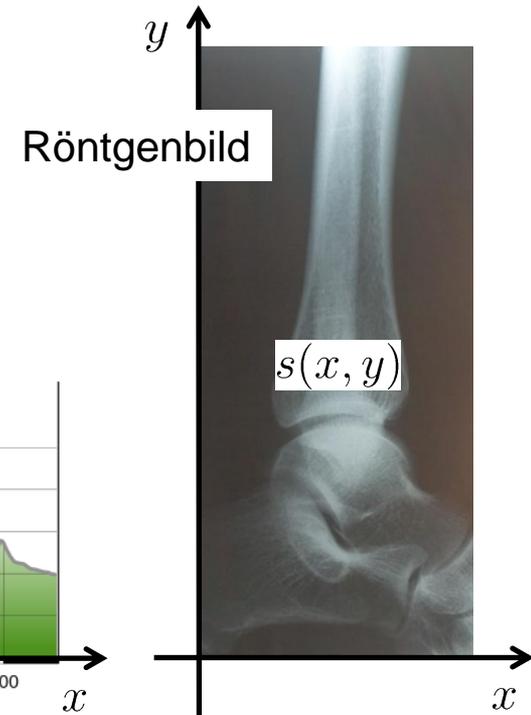
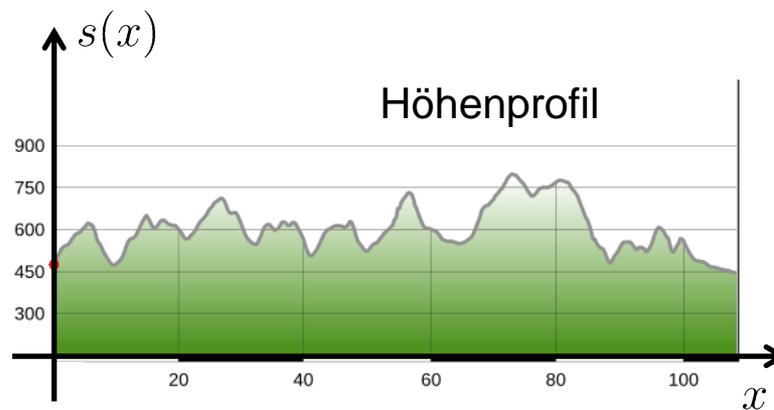
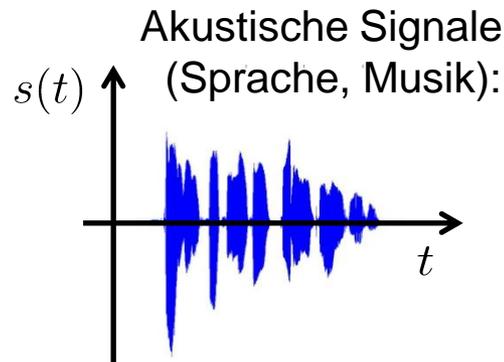
Beispiele:

Ströme und Spannungen in elektrischen Schaltungen

Medizintechnische Signale (EKG, EEG)

Bilder

Videosignale



Der Ursprung dieser Signale ist vielfältig.

Die Methoden der Analyse und der Verarbeitung sind einheitlich und systematisch.

6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

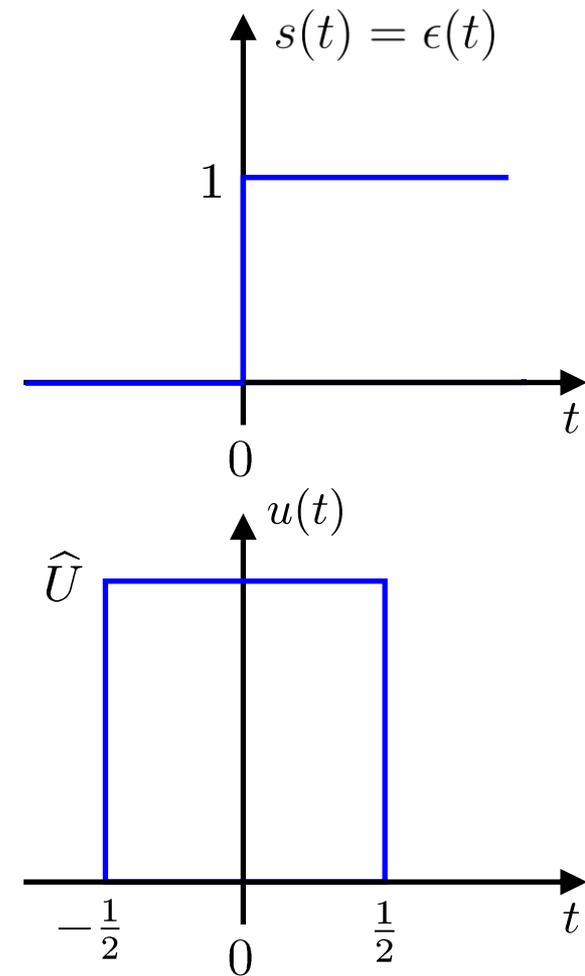
Elementarsignale



Einheitssprung: $\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

In der Systemtheorie wird oft ohne Einheiten gearbeitet. Zeit z.B. bezogen auf 1s

Rechteckimpuls: $u(t) = \begin{cases} \hat{U} & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



(Co-)Sinussignal: $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$

6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Elementarsignale

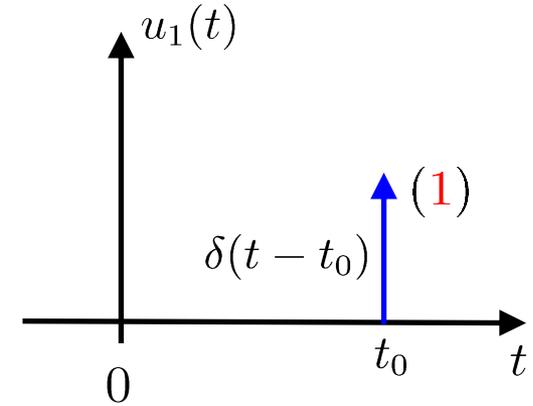
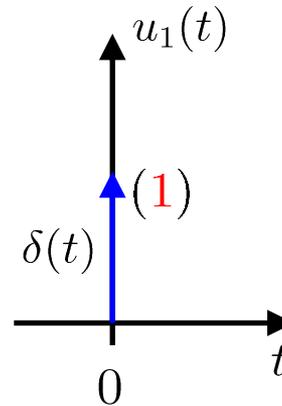


Der Dirac-Impuls: $\delta(t)$

Eigenschaften:

1) $\delta(t - t_0) = 0$ wenn $t \neq t_0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
„Ausschneideeigenschaft“

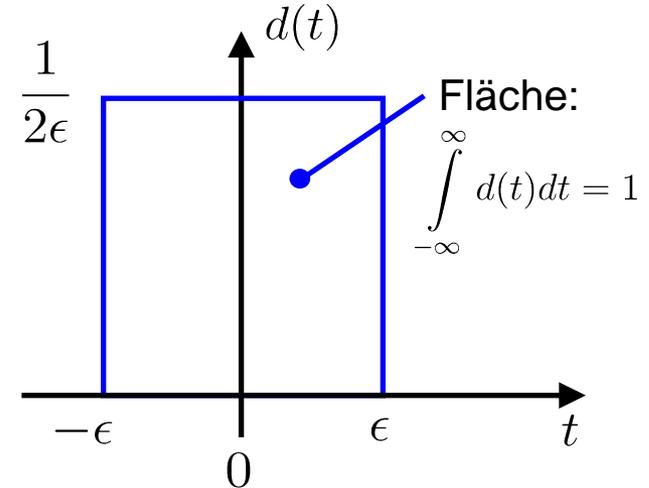


Herleitung:

$$d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \leq t \leq +\epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

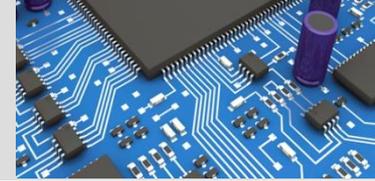
Definition: $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d(t)$

Es gilt: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$



6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)



Eine wichtige Klasse von Systemen werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Diese Systeme sind **linear** und **zeitinvariant** (*linear time-invariant system*, kurz: LTI-System).

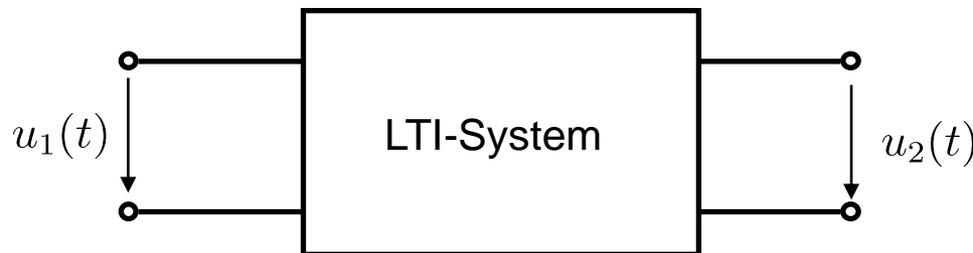
Die Eingangssignale $u_{1\nu}(t)$ und die Ausgangssignale $u_{2\nu}(t)$ sind durch eine zeitunabhängige Abbildung $u_{2\nu}(t) = \mathfrak{T}\{u_{1\nu}(t)\}$ miteinander verbunden.

Schreibschrift-T

Für beliebige Eingangs- und Ausgangssignale $u_{21}(t) = \mathfrak{T}\{u_{11}(t)\}$ und $u_{22}(t) = \mathfrak{T}\{u_{12}(t)\}$ gilt:

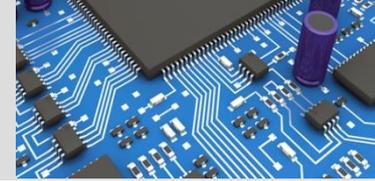
$$\mathfrak{T}\{au_{11}(t) + bu_{12}(t)\} = a \cdot \mathfrak{T}\{u_{11}(t)\} + b \cdot \mathfrak{T}\{u_{12}(t)\}$$

Aufgrund der Zeitinvarianz gilt: $u_2(t - t_0) = \mathfrak{T}\{u_1(t - t_0)\}$

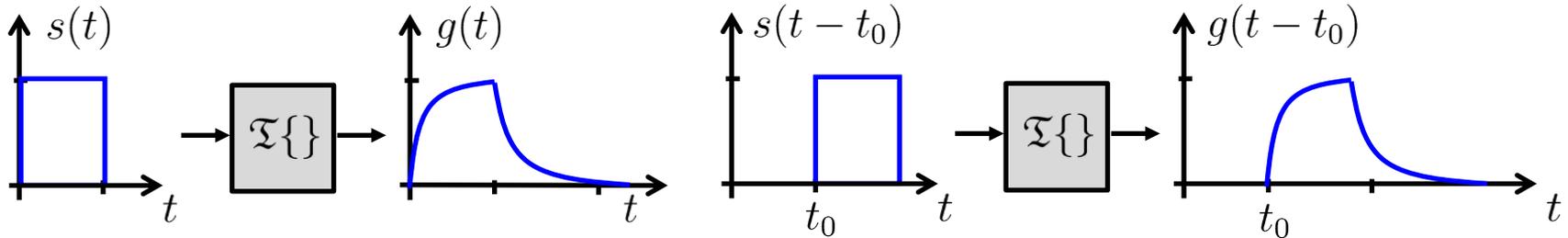


6.1 Signale und Systeme: Systemtheorie

Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

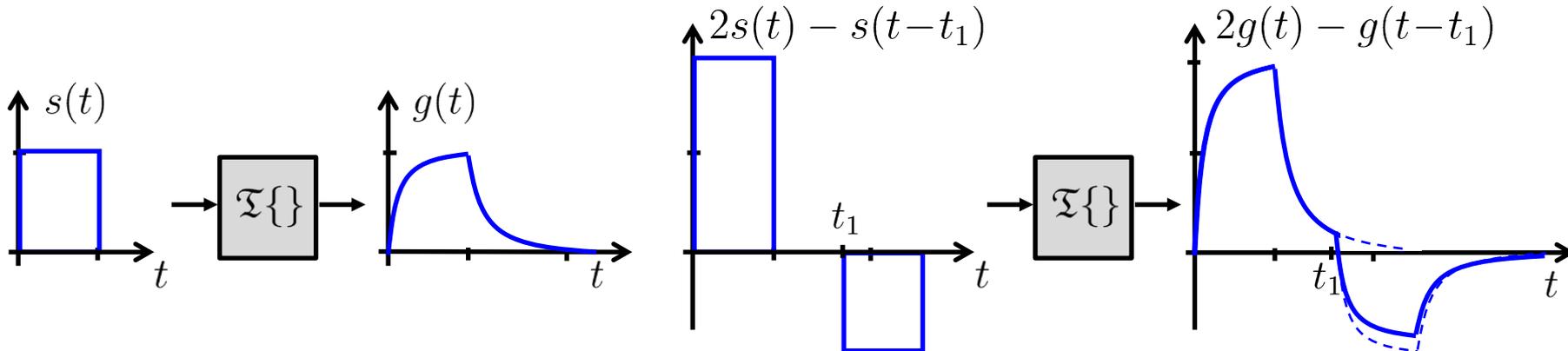


Beispiel für Zeitinvarianz: $\mathfrak{T}\{s(t - t_0)\} = g(t - t_0)$



Beispiel für Linearität:

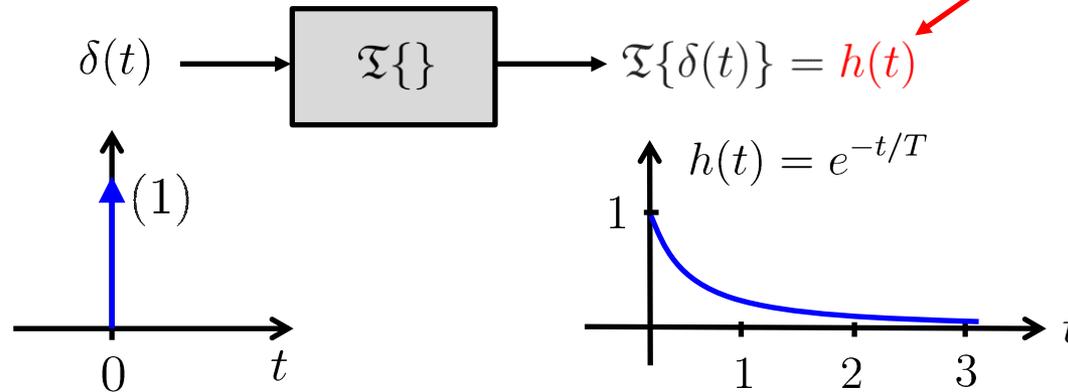
$$\mathfrak{T}\{2s(t) - s(t - t_1)\} = 2g(t) - g(t - t_1)$$



6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

Impulsantwort und Faltung

Wie reagiert ein LTI-System auf einen *Dirac-Impuls* am Eingang? Mit der **Impulsantwort**:

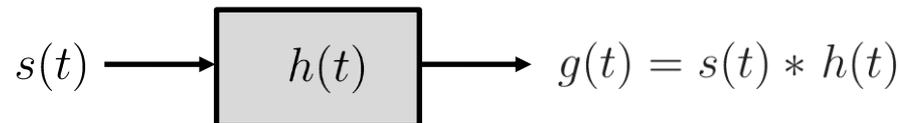


Wie reagiert ein LTI-System auf ein *beliebiges* Eingangssignal?

Durch **Faltung mit der Impulsantwort**:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = s(t) * h(t)$$

Faltungsintegral

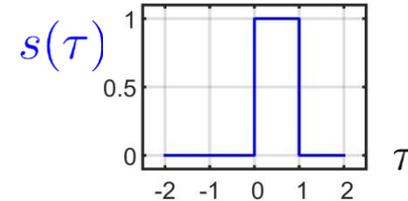
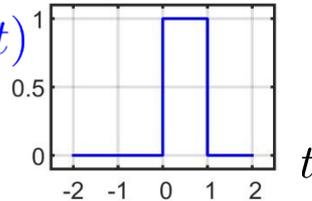


6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

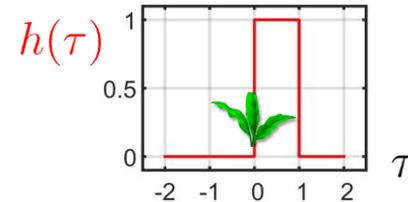
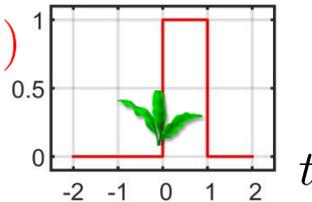
Faltung

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = s(t) * h(t)$$

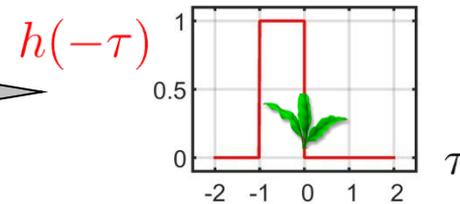
1) Schreibe $s(t)$ als $s(\tau)$:



2) Schreibe $h(t)$ als $h(\tau)$:

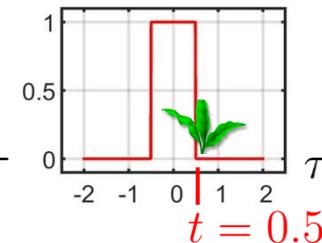
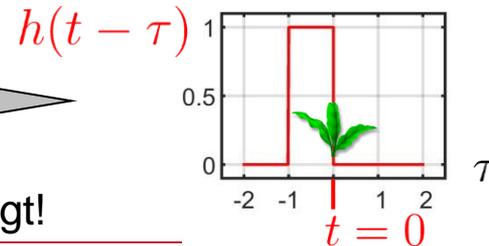


3) Schreibe $h(\tau)$ als $h(-\tau)$:



4) Verschiebe $h(-\tau)$ um t nach rechts:

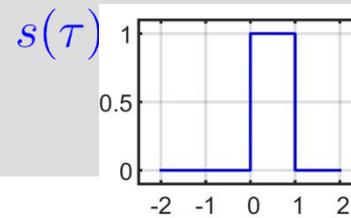
$$t \in \mathbb{R}$$



Das t -Blatt markiert die Stelle, wo $h(0)$ bzw. bei $h(t - \tau)$ das t liegt!

6.1 Signale und Systeme: Faltung

Zeitbereich



$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

5) Ordne $s(\tau)$ und $h(t - \tau)$ untereinander an, multipliziere für jedes $t \in \mathbb{R}$, und berechne den Flächeninhalt (=Integration):

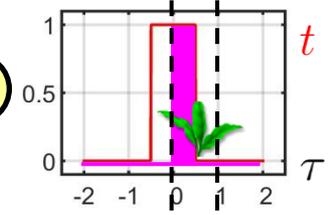


I

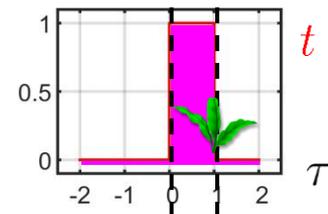
$g(t \leq 0) = 0$



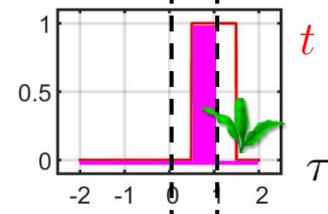
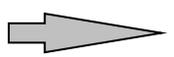
II



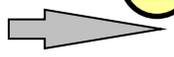
$g(t = 0.5) = 0.5$



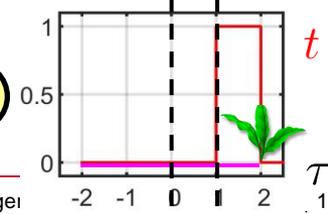
$g(t = 1) = 1$



$g(t = 1.5) = 0.5$



III



$g(t \geq 2) = 0$

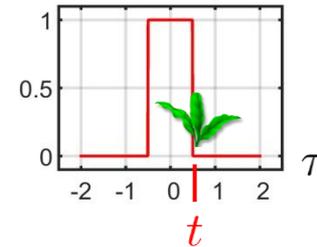
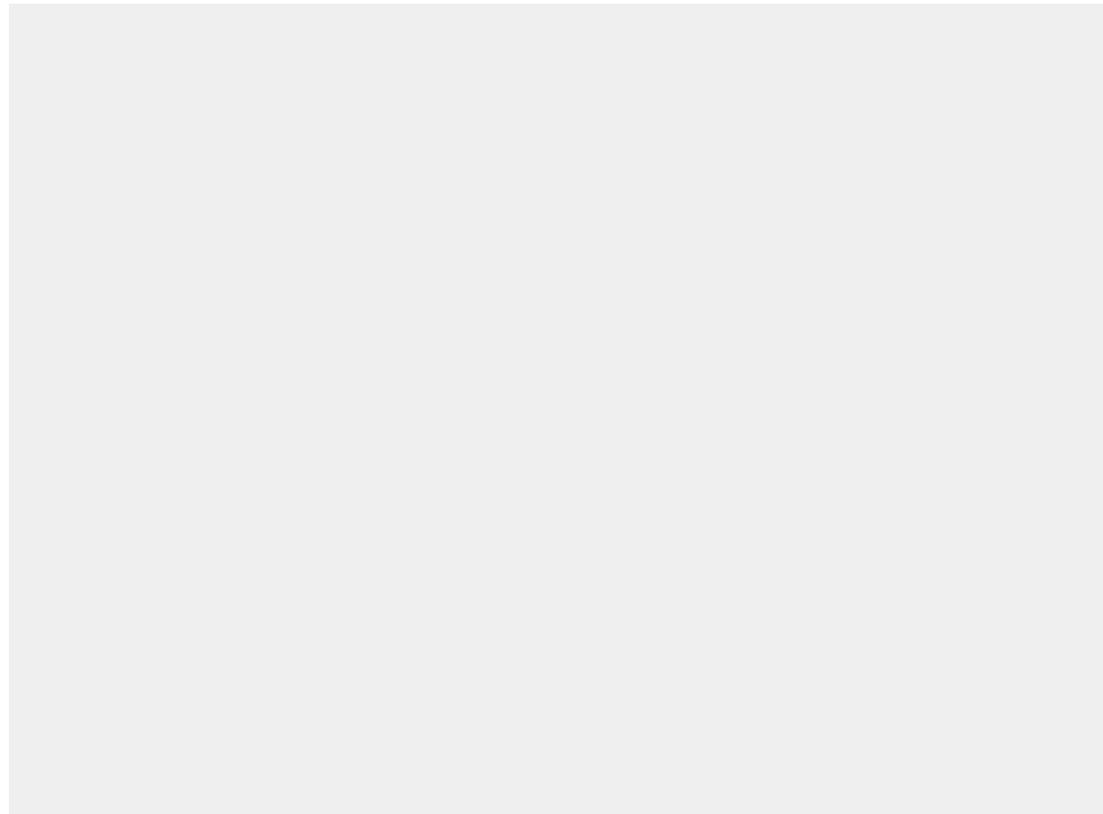
6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

Faltung

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t(\tau)d\tau$$

$s(\tau)$
 $h(t - \tau)$
 $\gamma_t(\tau)$

$g(t)$

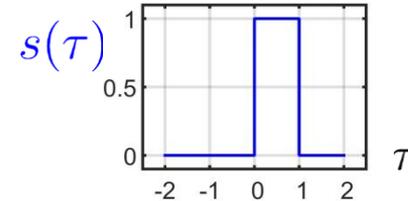
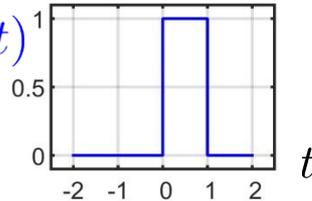


6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

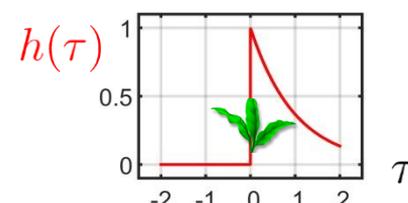
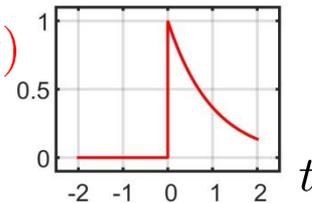
Faltung – 2. Beispiel

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = s(t) * h(t)$$

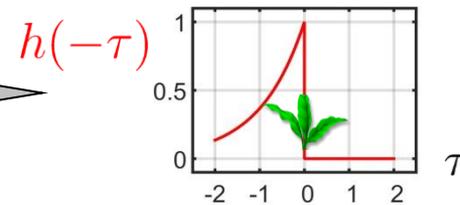
1) Schreibe $s(t)$ als $s(\tau)$:



2) Schreibe $h(t)$ als $h(\tau)$:

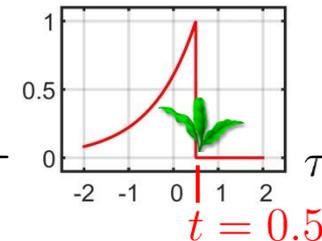
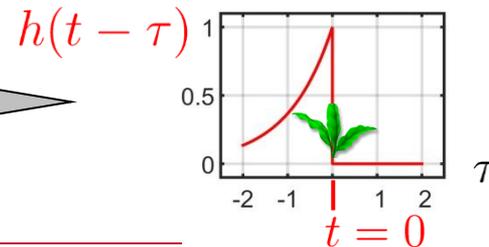


3) Schreibe $h(\tau)$ als $h(-\tau)$:



4) Verschiebe $h(-\tau)$ um t nach rechts:

$$t \in \mathbb{R}$$



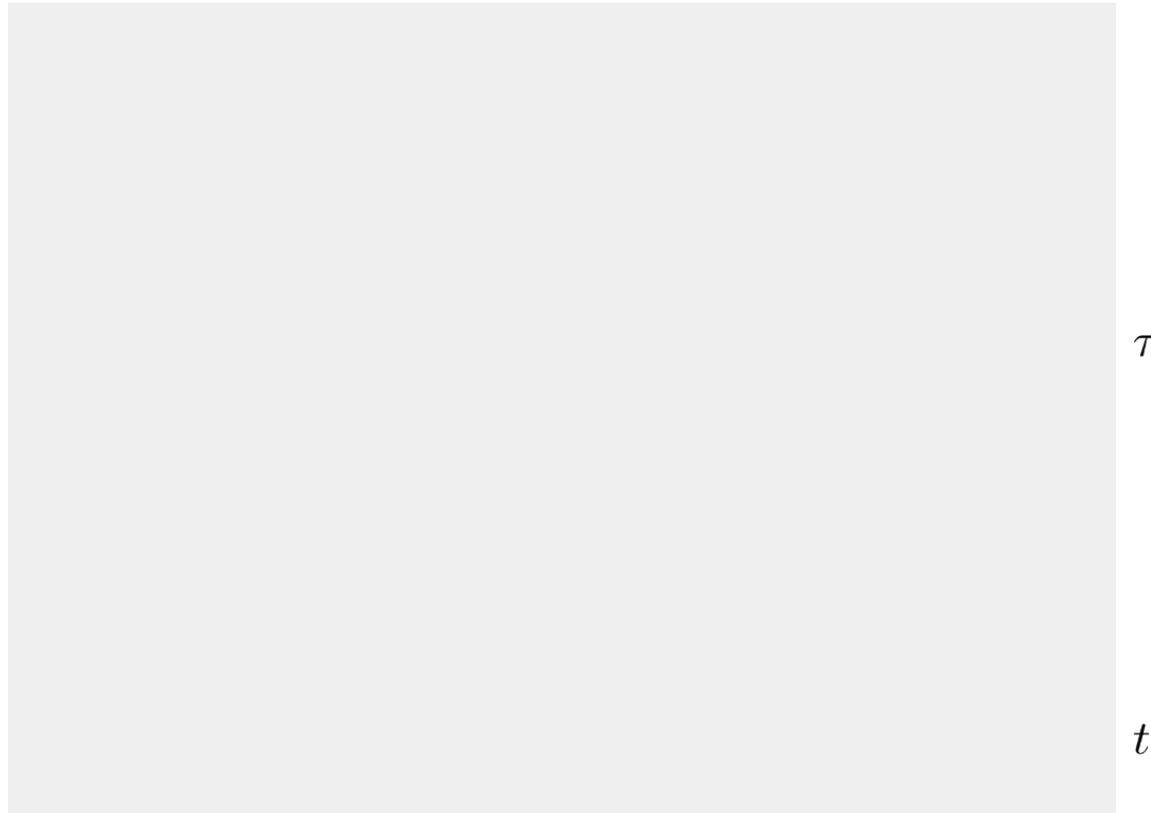
6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

Faltung – 2. Beispiel

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t(\tau)d\tau$$

$s(\tau)$
 $h(t - \tau)$
 $\gamma_t(\tau)$

$g(t)$



6.1 Signale und Systeme: Zeitbereich

Faltungsalgebra



$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau = s(t) * h(t)$$

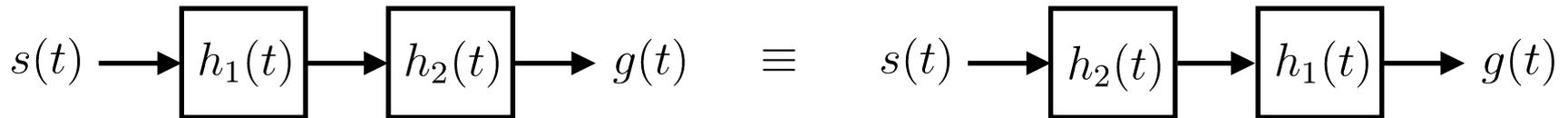
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t - \tau)d\tau = h(t) * s(t)$$

Signal $s(t)$ und System $h(t)$ werden in der Systemtheorie beide auf gleiche Art und Weise beschrieben. Aufgrund der Symmetrie im Faltungsintegral sind sie sogar austauschbar!

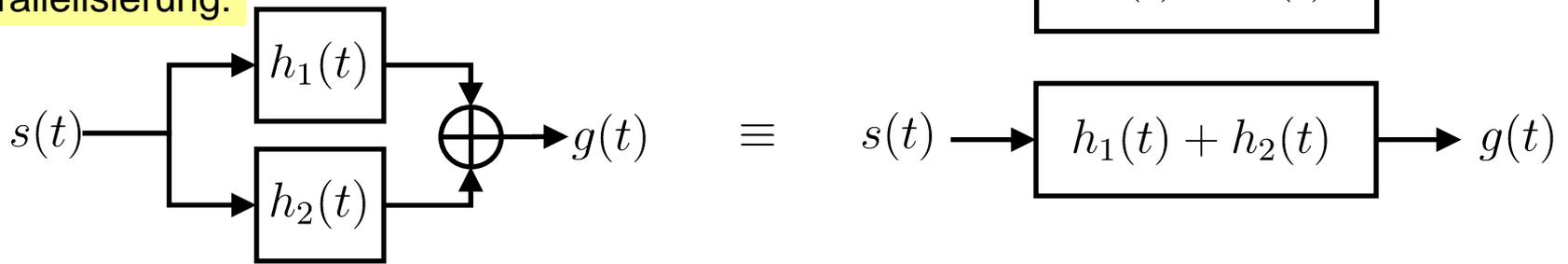
Symmetrie:



Kaskadierung (Serienschaltung):



Parallelisierung:

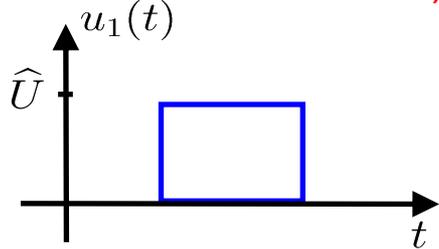


6.2 Sig. & Sys.: Frequenzbereich (Fourier-Transformation)

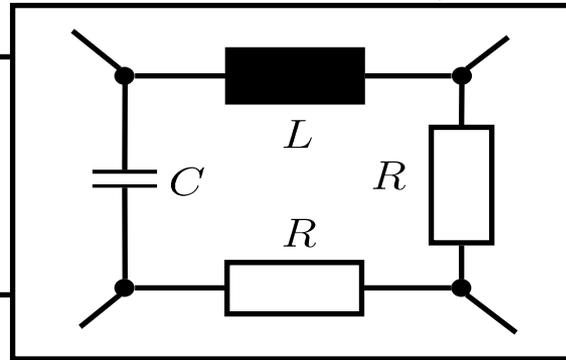
Übertragungsverhalten linearer Zweitore

Gegeben: $u_1(t)$, sowie das elektrische Netzwerk. Gesucht: $u_2(t)$

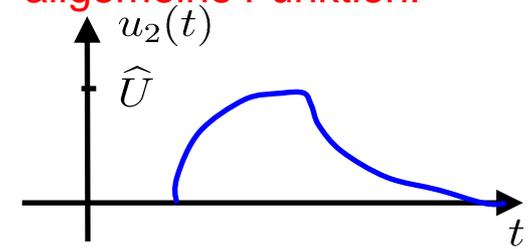
Allgemeine Funktion:
(nicht nur Sinus/Cosinus)



Lineares Zweitor = System



Resultat: wieder eine
allgemeine Funktion:



↓ Berechnung
mittels
Fourier-Transformation ②

↓ Frequenzgang aus
komplexer Netzwerk-
Berechnung ①
(Kap. 5.3, 5.4)

↑ Berechnung
mittels
inverser
Fourier-Trafo ④

$$\underline{U}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_1(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)$$

③

Multiplikation im Frequenzbereich

6.2 Die Fourier-Transformation

Definition

Definition der Fourier-Transformation:

Definition der Inversen Fourier-Transformation:

2

$$\underline{U}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

4

Alternative Schreibweisen:

Alternative Schreibweisen:

$$\underline{U}_1(j\omega) = \mathfrak{F}\{u_1(t)\}$$

$$\underline{U}_1(j\omega) \bullet \circ u_1(t)$$

$$u_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\underline{U}_2(j\omega)\}$$

$$u_2(t) \circ \bullet \underline{U}_2(j\omega)$$

Schreibschrift-F

Transformationssymbol:
 Bildbereich ●—○ Zeitbereich
 Zeitbereich ○—● Bildbereich

Fourier-Transformierte
 der Spannung (mit
 Unterstrich!)

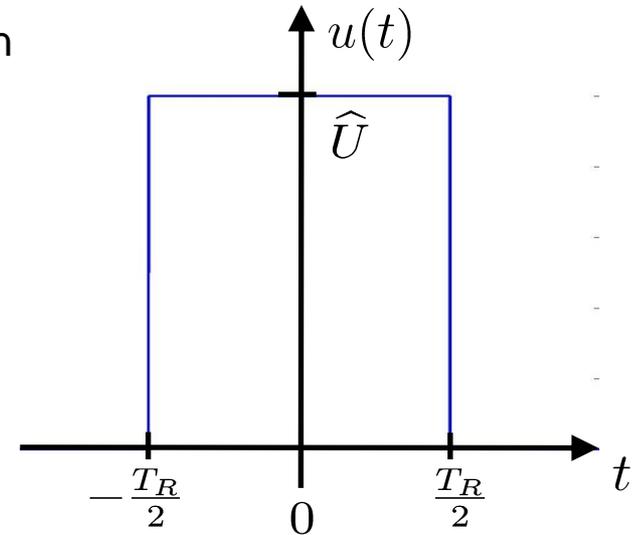
6.2 Die Fourier-Transformation

Fourieranalyse – Beispiel 1

Beispiel: Die Fourier-Transformierte der Rechteck-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} & -\frac{T_R}{2} \leq t \leq \frac{T_R}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{U}(j\omega) =$$



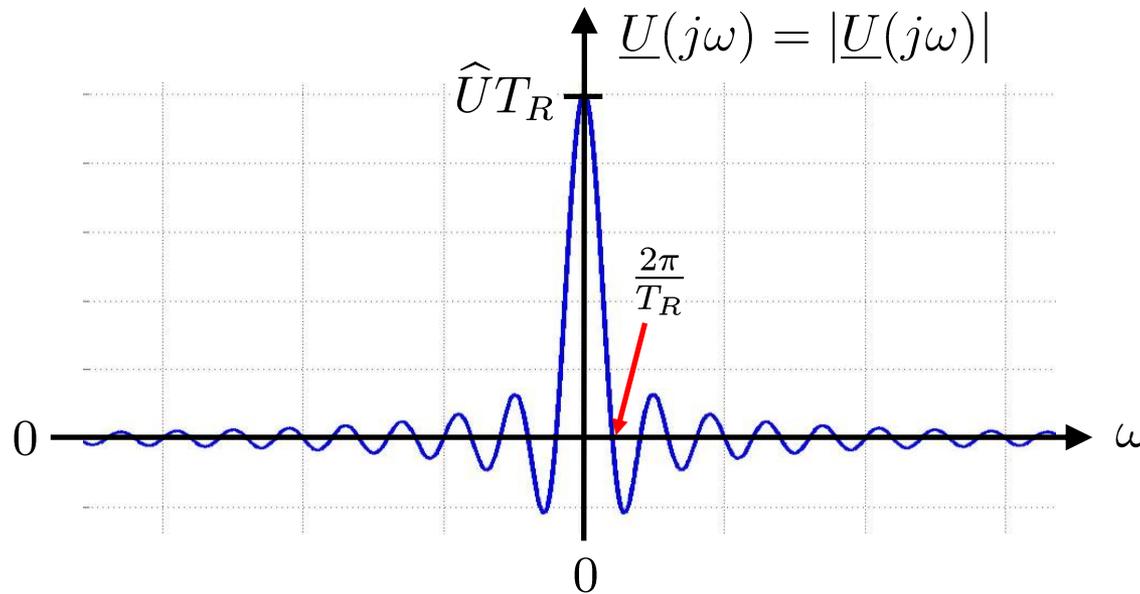
6.2 Die Fourier-Transformation

Fourieranalyse – Beispiel 1

$$\underline{U}(j\omega) = \hat{U}T_R \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T_R}{2}\right)$$

Verhalten bei $x = 0$ (Regel von l'Hopital): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

Nullstellen: $\frac{\omega T_R}{2} = k\pi \Leftrightarrow \omega = k \frac{2\pi}{T_R}, k \in \mathbb{Z}$



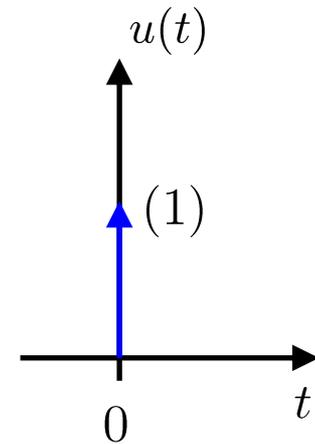
6.2 Die Fourier-Transformation

Fourieranalyse – Beispiel 2

Beispiel: Die Fourier-Transformierte des Dirac-Impulses

$$u(t) = \delta(t)$$

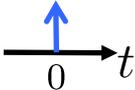
$$\underline{U}(j\omega) =$$



6.2 Die Fourier-Transformation

Korrespondenztabelle zur Fourier-Transformation: Dirac-Impulse

Im folgenden eine Tabelle zur schnellen Bestimmung von transformierten Signalen, wenn Dirac-Impulse im Zeit- oder im Frequenzbereich beteiligt sind:

Zeitbereich \circ \bullet Frequenzbereich	
$u(t)$	$\underline{U}(j\omega)$
 $\delta(t)$	1
1	$\delta(f) = 2\pi \cdot \delta(j\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$j\pi \cdot \delta(j(\omega - \omega_0)) + j\pi \cdot \delta(j(\omega + \omega_0))$
$\sin(\omega_0 t)$	$\pi \cdot \delta(j(\omega - \omega_0)) - \pi \cdot \delta(j(\omega + \omega_0))$

© T. Fingscheidt, Vorlesung "Einführung in die Elektrotechnik für Medienwissenschaftler", TU Braunschweig

6.2 Die Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation (I)

Linearität:

Wenn $\underline{U}_1(j\omega) = \mathfrak{F}\{u_1(t)\}$ und $\underline{U}_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{u_2(t)\}$ gilt, dann gilt auch:

$$\mathfrak{F}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 \underline{U}_1(j\omega) + c_2 \underline{U}_2(j\omega)$$

Symmetrie für reellwertige Funktion $u(t)$:

$$\underline{U}(-j\omega) = \underline{U}^*(j\omega) \quad (\text{konjugierte Symmetrie})$$

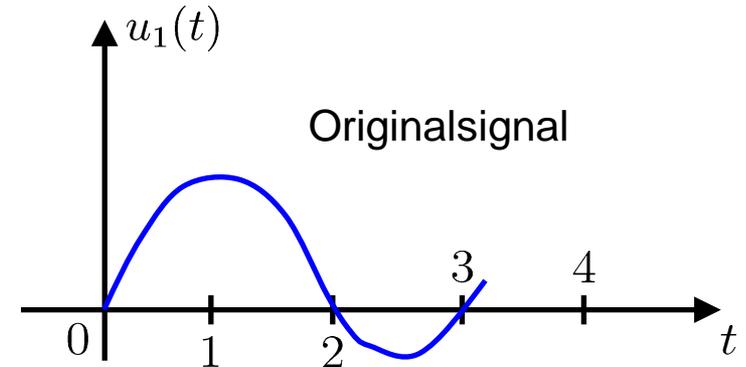
6.2 Die Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation (II)

Zeit- und Frequenz-Skalierung:

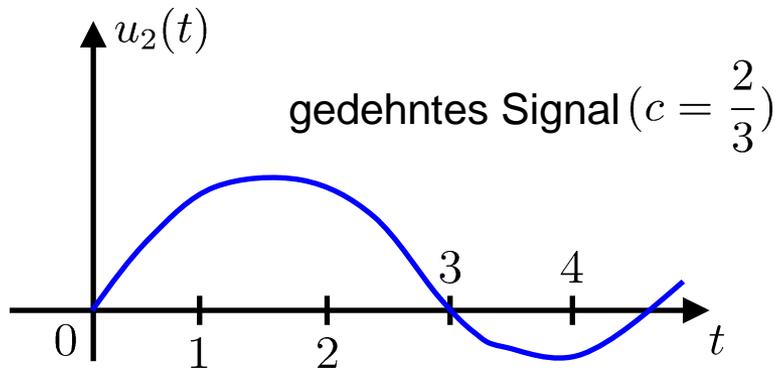
Wenn $u_1(t) \circ \bullet \underline{U}_1(j\omega)$ gilt, dann gilt auch:

$$u_1(ct) \circ \bullet \frac{1}{|c|} \cdot \underline{U}_1\left(\frac{j\omega}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$



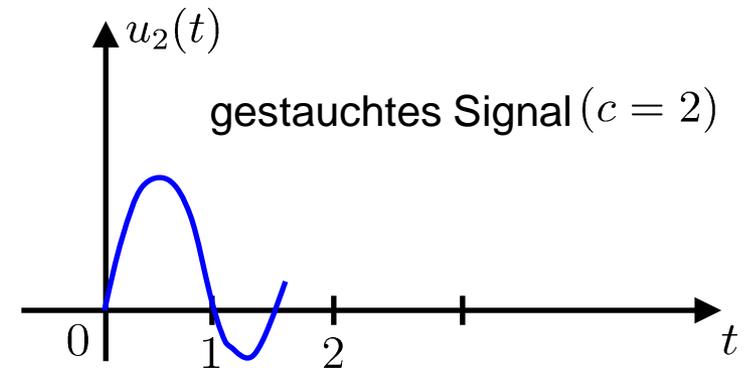
Zeitliches Dehnen =
Stauen in der Frequenz:

$$u_2(t) = u_1(ct), \quad |c| < 1, c \neq 0$$



Zeitliches Stauchen =
Dehnen in der Frequenz:

$$u_2(t) = u_1(ct), \quad |c| > 1$$



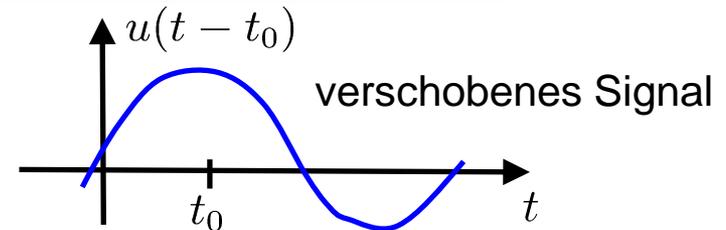
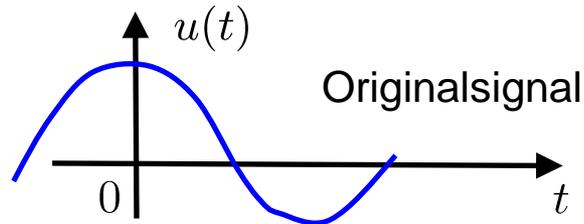
6.2 Die Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation (III)

Zeit-Verschiebung:

Wenn $u(t) \circ \bullet \underline{U}(j\omega)$ gilt, dann gilt auch:

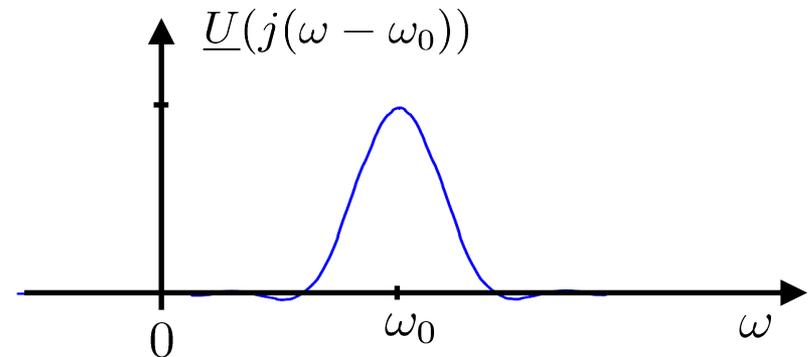
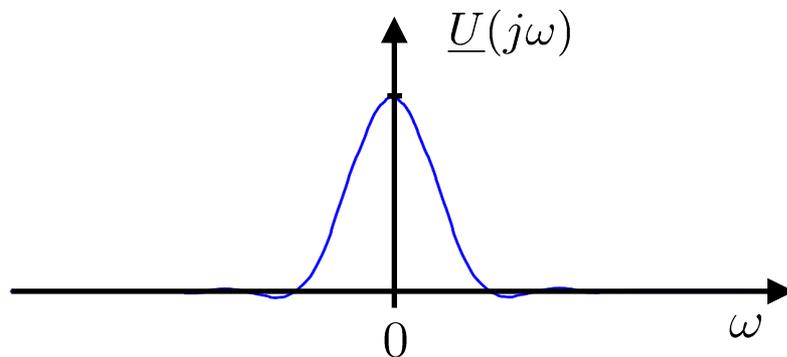
$$u(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} \cdot \underline{U}(j\omega)$$



Frequenz-Verschiebung:

Wenn $u(t) \circ \bullet \underline{U}(j\omega)$ gilt, dann gilt auch:

$$u(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \circ \bullet \underline{U}(j(\omega - \omega_0))$$



6.2 Die Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation (IV)

Paseval'sche Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(j\omega)|^2 d\omega$$

6.2 Die Fourier-Transformation

Der Faltungssatz der Fourier-Transformation

Wir gehen aus von der Beziehung: $\underline{U}_1(j\omega) \cdot \underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)$

Die Multiplikation im Frequenzbereich
entspricht einer Faltungsoperation im Zeitbereich:

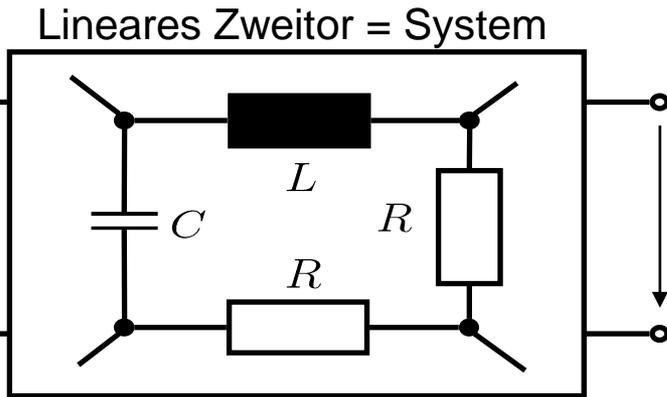
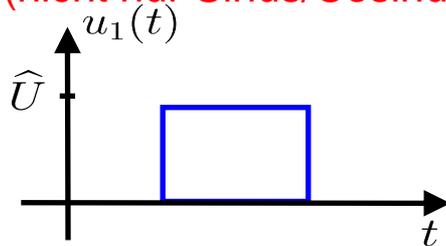
$$u_1(t) * h(t) = u_2(t)$$

6.2 Die Fourier-Transformation

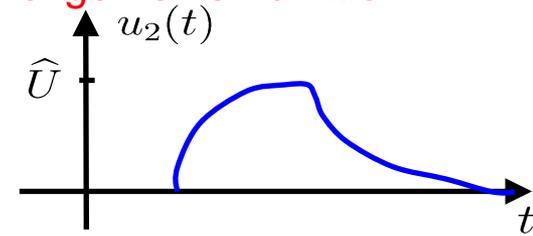
Übertragungsverhalten linearer Zweitore (Zeitbereich)

Gegeben: $u_1(t)$, sowie das elektrische Netzwerk. Gesucht: $u_2(t)$

Allgemeine Funktion:
(nicht nur Sinus/Cosinus)



Resultat: wieder eine
allgemeine Funktion:



$$\underline{H}(j\omega)$$

Berechnung
mittels
inverser
Fourier-Trafo

1

$$h(t)$$

$$= u_2(t)$$

$$u_1(t)$$

2

Faltung im Zeitbereich

$$u_1(t) * h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau = u_2(t)$$

6.2 Die Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation (V)

Faltungssatz:

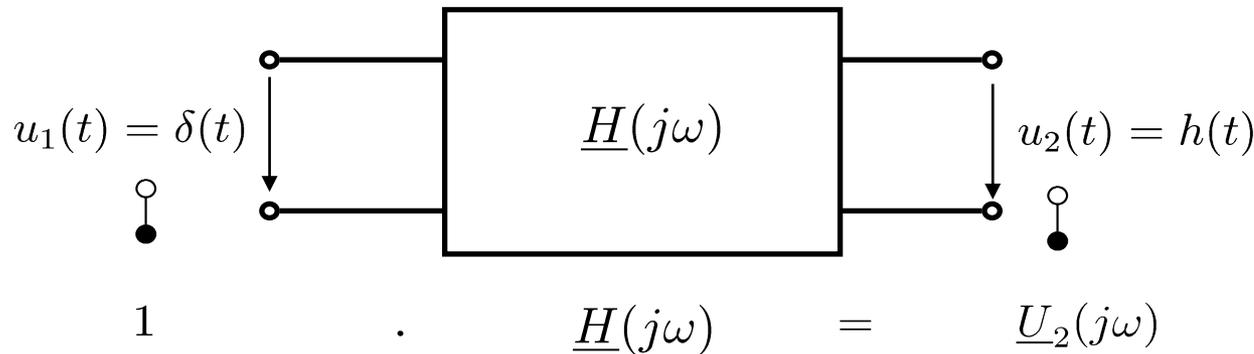
Wenn $u_1(t) \circ \bullet \underline{U}_1(j\omega)$ und $h(t) \circ \bullet \underline{H}(j\omega)$ gilt, dann gilt auch:

$$\mathfrak{F}\{u_1(t) * h(t)\} = \underline{U}_1(j\omega) \cdot \underline{H}(j\omega)$$

$$u_1(t) * h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Faltungsintegral

$h(t)$ wird **Impulsantwort** des Systems $\underline{H}(j\omega)$ genannt, denn:



Frequenzbereichs-Rechnung

bzw. $u_1(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t)$

Zeitbereichs-Rechnung

6.2 Die Fourier-Transformation

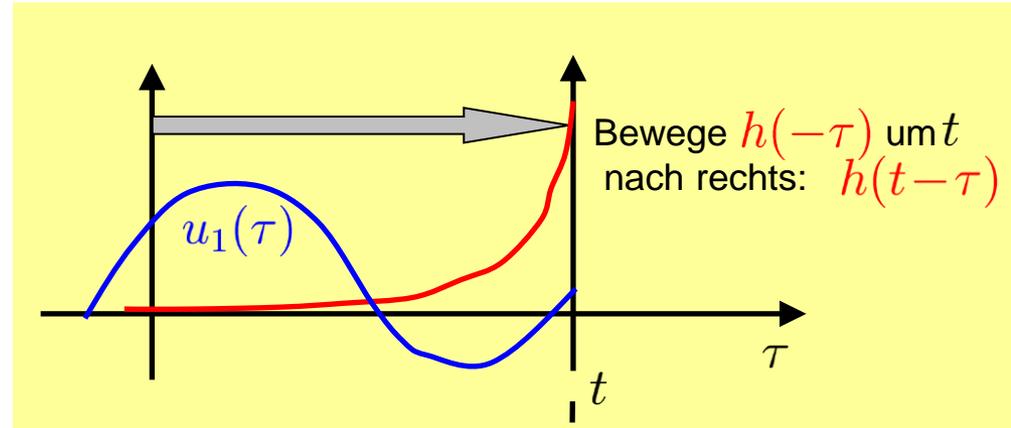
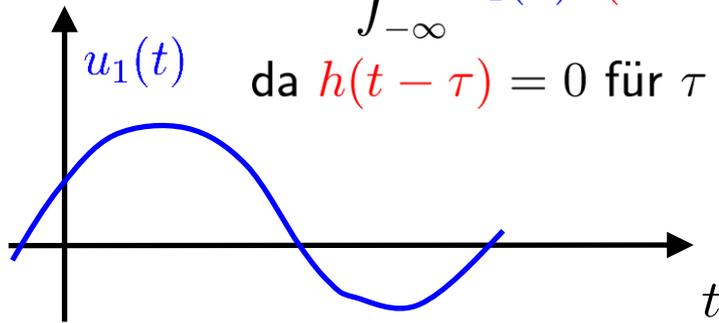
Die Faltung (engl. convolution)

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)h(t - \tau)d\tau = u_1(t) * h(t)$$

wird als Faltungsintegral bezeichnet

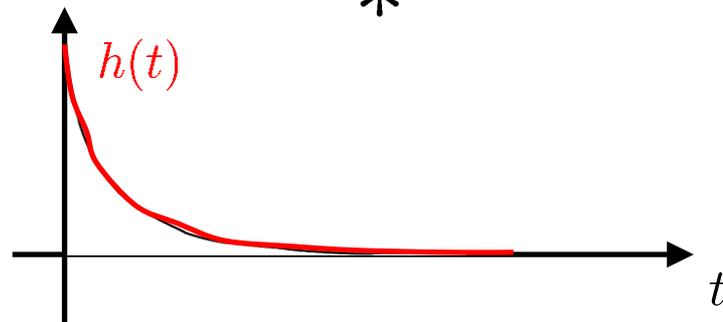
$$= \int_{-\infty}^t u_1(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

da $h(t - \tau) = 0$ für $\tau > t$

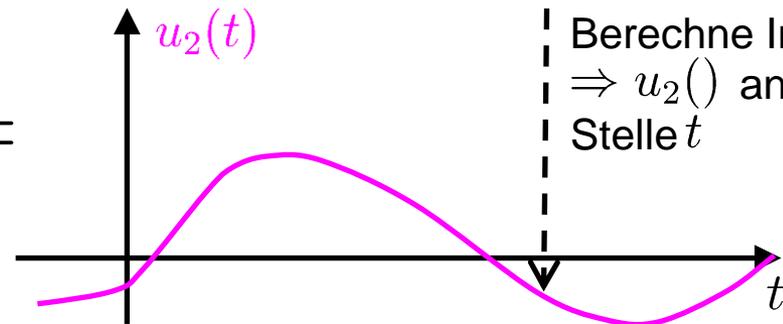


Bewege $h(-\tau)$ um t
nach rechts: $h(t - \tau)$

*



=



Berechne Integral,
 $\Rightarrow u_2(t)$ an der
Stelle t

6.2 Die Fourier-Transformation

Bestimmung des Frequenzgangs eines Systems

$$\begin{array}{lcl} u(t) & \circ \bullet & \underline{U}(j\omega) \\ h(t) & \circ \bullet & \underline{H}(j\omega) \\ u(t) * h(t) & \circ \bullet & \underline{U}(j\omega) \cdot \underline{H}(j\omega) \end{array}$$

Bestimmung des Frequenzgangs $\underline{H}(j\omega)$ eines LTI-Systems:

Entweder:

Cosinus-Spannungen mit der Frequenz $0 \leq \omega < \infty$ an das System anlegen und die Dämpfung und Phasenverschiebung dieser Spannungen messen.

Oder:

Das System mit einem Dirac-Impuls beaufschlagen, die Impulsantwort aufzeichnen. Die Fourier-Transformierte der Impulsantwort ist der Frequenzgang.

6.2 Die Fourier-Transformation

Impulsantwort des RC-Tiefpasses

$$h(t) = \begin{cases} \omega_g e^{-\omega_g t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{H}(j\omega) =$$

6.2 Die Fourier-Transformation

Konvergenzbedingungen

Für die Existenz der Fourier-Transformation (d.h. Lösbarkeit des Integrals) können die folgenden *hinreichenden* Konvergenzbedingungen angegeben werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty \quad (u(t) \text{ ist quadratisch integrierbar})$$

oder die Dirichlet'schen Bedingungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty \quad (u(t) \text{ ist absolut integrierbar})$$

$u(t)$ muss eine endliche Anzahl von Maxima und Minima innerhalb jeden endlichen Intervalls aufweisen.

$u(t)$ muss eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen innerhalb jeden endlichen Intervalls aufweisen.

Darüber hinaus existiert das Fourierintegral auch für verschiedene nicht absolut oder quadratisch integrierbare Funktionen.

6.2 Die Fourier-Transformation

Zusammenfassung: Eigenschaften der Fourier-Transformation

gerade ungerade
 $u(t) = u^{(g)}(t) + u^{(u)}(t) \quad \circ \bullet \quad \mathfrak{F}\{u(t)\} = \underline{U}(j\omega) = \text{Re}\{\underline{U}(j\omega)\} + j\text{Im}\{\underline{U}(j\omega)\}$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \bullet$	Frequenzbereich $\bullet \circ$
Transformation	$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$\underline{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$
Gerader Anteil	$u^{(g)}(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u^*(-t)$	$\text{Re}\{\underline{U}(j\omega)\}$
Ungerader Anteil	$u^{(u)}(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}u^*(-t)$	$j\text{Im}\{\underline{U}(j\omega)\}$
Konjugation	$u^*(t)$	$\underline{U}^*(-j\omega)$
$u(t)$ rein reell...	$u(t) = u^*(t)$	$\underline{U}(j\omega) = \underline{U}^*(-j\omega)$
Zeit-Verschiebung	$u(t - t_0)$	$\underline{U}(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad t_0 \in \mathbb{R}$
Frequenz-Verschiebung	$u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$\underline{U}(j(\omega - \omega_0)) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$
Zeit- und Frequenz-Spiegelung	$u(-t)$	$\underline{U}(-j\omega)$
Zeit- und Frequenz-Skalierung	$u(c \cdot t)$	$\frac{1}{ c } \cdot \underline{U}(j\frac{\omega}{c}) \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0$
Überlagerung	$c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t)$	$c_1 \cdot \underline{U}_1(j\omega) + c_2 \cdot \underline{U}_2(j\omega)$
Faltung	$u(t) * h(t)$	$\underline{U}(j\omega) \cdot H(j\omega)$
Modulation	$u_1(t) \cdot u_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \underline{U}_1(j\omega) * \underline{U}_2(j\omega)$
Parseval'sches Theorem	$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(j\omega) ^2 d\omega$	

© T. Fingscheidt, Vorlesung "Einführung in die Elektrotechnik für Medienwissenschaftler", TU Braunschweig

7. SIGNALE UND SYSTEME: DIE LAPLACE-TRANSFORMATION

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
TU Braunschweig

- 7.1 Die Laplace-Transformation
- 7.2 Das Laplace-Ersatzschaltbild
- 7.3 Die Rücktransformation
- 7.4 Anwendungen der Laplace-Transformation

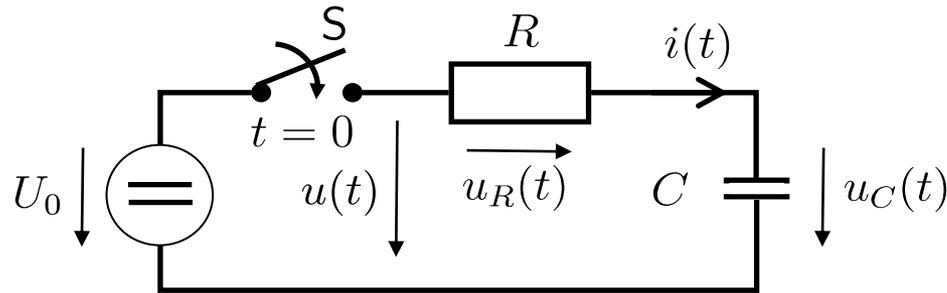


7.1 Die Laplace-Transformation

Motivation: Berechnung von Einschaltvorgängen...

Im folgenden interessieren uns im wesentlichen Einschaltvorgänge.

Beispiel:

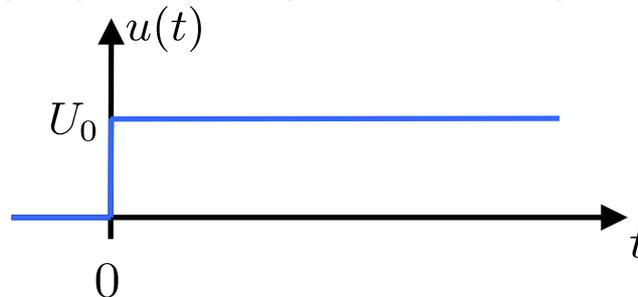


$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S geschlossen. Der Kondensator sei zu diesem Zeitpunkt ungeladen, d.h. $u_C(0+) = 0$.

das „0+“ bedeutet: *kurz nachdem* der Schalter geschlossen wurde

Darstellung der *Eingangsspannung* durch Sprungfunktion:



Frage:
Wie groß ist $i(t)$?
Wie groß ist $u_C(t)$?

7.1 Die Laplace-Transformation

Prinzip

Beschränkung auf kausale Signale (Einschaltvorgänge), d.h. $u(t) = 0$ für $t < 0$.

Behandlung von Einschwingvorgängen durch Berücksichtigung von Anfangsbedingungen.

Häufige Anfangsbedingungen: Strom durch eine Spule $i_L(t = 0+)$,

Spannung an einem Kondensator $u_C(t = 0+)$,

da diese sich *nicht sprunghaft* ändern können!

Idee:

- 1) Transformation aller (eingeschalteten) Strom- und Spannungsquellen in einen *Bildbereich* (Laplace-Bereich) \Rightarrow *Laplace-Ersatzschaltbild* zeichnen
- 2) Transformation aller konzentrierten Netzwerkelemente (Ohm'sche Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten) in einen *Bildbereich* (Laplace-Bereich) \Rightarrow *Laplace-Ersatzschaltbild* zeichnen
- 3) Anwendung der bekannten Methoden im Bildbereich (Kirchhoff'sche Sätze, Ohm'sches Gesetz sowie Zusammenhang von Strom und Spannung an Kapazität und Induktivität)
Bestimmung von gesuchtem/r Strom/Spannung im Bildbereich
- 4) Rücktransformation der interessierenden Größen in den *Zeitbereich*

Im folgenden sehen wir uns diese **vier Schritte** etwas genauer an!

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Zeitbereich \rightarrow Bildbereich: Strom & Spannung

Schritt 1: Transformation von Strömen und Spannungen

Definition der Einseitigen Laplace-Transformation:

$$\underline{U}(s) = \int_{0+}^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

Imaginäre Einheit $j := \sqrt{-1}$

Die Variable s ist eine komplexe Zahl: $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$

Einheit: $[s] = s^{-1}$, $[st] = 1$

reelle Zahl Kreisfrequenz

Wir rechnen mit der Variable s , als wäre sie eine beliebige Variable...

(keine weiteren Kenntnisse zu komplexen Zahlen nötig)

Alternative Schreibweisen:

$$\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Schreibschrift-L

$$\underline{U}(s) \bullet \circ u(t)$$

Transformationssymbol: Bildbereich $\bullet \circ$ Zeitbereich
Zeitbereich $\circ \bullet$ Bildbereich

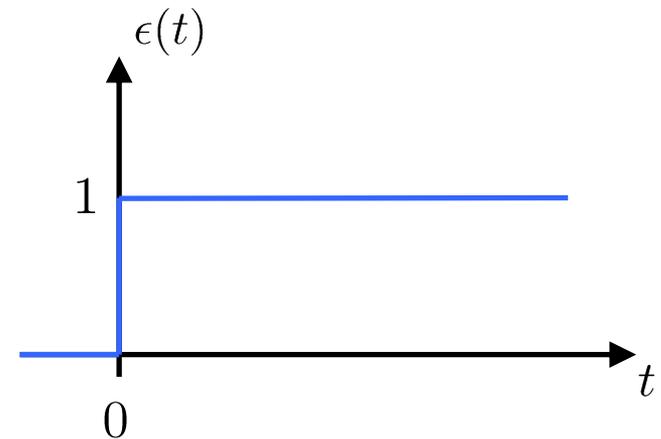
Laplace-Transformierte der Spannung (mit Unterstrich!)

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Zeitbereich \rightarrow Bildbereich: Strom & Spannung

Beispiel für Schritt 1: Die Laplace-Transformierte der Sprungfunktion

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Zeitbereich \rightarrow Bildbereich: Strom & Spannung

Beispiel für Schritt 1: Die Laplace-Transformierte der Exponentialfunktion

$$u(t) = \begin{cases} e^{-ct} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritte 1 und 4: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

Zeitbereich ($t \geq 0$)	Bildbereich
$\delta(t) \xrightarrow[0]{ }$ t (Dirac-Stoß)	1
1 (Sprung)	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-ct}	$\frac{1}{s+c}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-ct}$	$\frac{1}{(s+c)^n}$
$1 - e^{-ct}$	$\frac{c}{s(s+c)}$
$\frac{1}{c_2 - c_1} (e^{-c_1 t} - e^{-c_2 t})$	$\frac{1}{(s+c_1)(s+c_2)}$
$\frac{1}{c_2 - c_1} (-c_1 e^{-c_1 t} + c_2 e^{-c_2 t})$	$\frac{s}{(s+c_1)(s+c_2)}$

Zeitbereich ($t \geq 0$)	Bildbereich
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
$e^{-ct} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+c)^2 + \omega^2}$
$e^{-ct} \cos \omega t$	$\frac{s+c}{(s+c)^2 + \omega^2}$

© T. Fingscheidt, Vorlesung "Einführung in die Elektrotechnik für Medienwissenschaftler", TU Braunschweig

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Eigenschaften der Laplace-Transformation (I)

Linearität:

Wenn $\underline{U}_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$ und $\underline{U}_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$ gilt, dann gilt auch:

$$\mathcal{L}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 \underline{U}_1(s) + c_2 \underline{U}_2(s)$$

Verschiebungssatz:

Wenn $u(t) \circ \bullet \underline{U}(s)$ gilt, dann gilt auch:

$$u(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} \underline{U}(s)$$

Faltungssatz:

Wenn $u_1(t) \circ \bullet \underline{U}_1(s)$ und $u_2(t) \circ \bullet \underline{U}_2(s)$ gilt, dann gilt auch:

$$\mathcal{L}\{u_1(t) * u_2(t)\} = \underline{U}_1(s) \cdot \underline{U}_2(s)$$

$$u_1(t) * u_2(t) := \int_{0+}^t u_1(t - \tau) u_2(\tau) d\tau$$

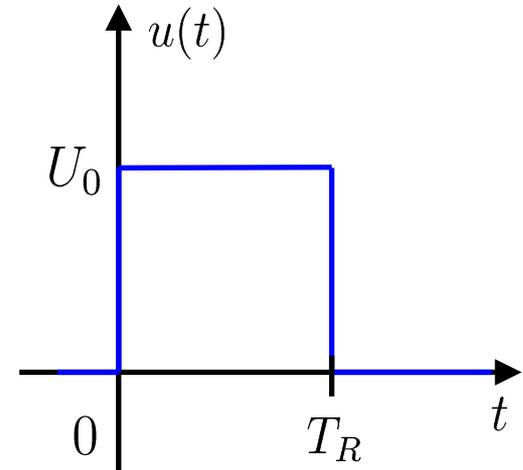
(gilt, wenn $u_2(t) = 0$ für $t < 0$)

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Zeitbereich \rightarrow Bildbereich: Beispiel

Beispiel für Schritt 1: Die Laplace-Transformierte der Rechteckfunktion, berechnet über die Eigenschaft der Linearität und den Verschiebungssatz

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & 0 \leq t \leq T_R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Eigenschaften der Laplace-Transformation (II)

Anfangswerttheorem:

Wenn $u(t) \circ \bullet \underline{U}(s)$ gilt, dann gilt auch:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underline{U}(s)$$

das „0+“ bedeutet: *kurz nachdem* der Schalter geschlossen wurde

Endwerttheorem:

Wenn $u(t) \circ \bullet \underline{U}(s)$ gilt, dann gilt auch:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \underline{U}(s)$$

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Eigenschaften der Laplace-Transformation (III)

Differentiationssatz:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Beispiel 1: einfache Ableitung (partielle Integration)

$$\int_{0+}^{\infty} \underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{f'} \underbrace{e^{-st}}_g dt = u(t)e^{-st} \Big|_{0+}^{\infty} + s \int_{0+}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \underline{-u(0+) + s\underline{U}(s)}$$

Beispiel 2: zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{\infty} \frac{d^2u(t)}{dt^2} e^{-st} dt &= \frac{du(t)}{dt} e^{-st} \Big|_{0+}^{\infty} + s \int_{0+}^{\infty} \frac{du(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \underline{-\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{du(t)}{dt} + s \cdot [s \cdot \underline{U}(s) - u(0+)]} \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^\nu u(t)}{dt^\nu} \right\} = s^\nu \underline{U}(s) - s^{\nu-1} u(0+) - s^{\nu-2} u_0^{(1)} - \dots - s u_0^{(\nu-2)} - u_0^{(\nu-1)}$$

$$\text{mit } u_0^{(\nu)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d^\nu u(t)}{dt^\nu}$$

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritt 1: Eigenschaften der Laplace-Transformation (IV)

Integrationsatz:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{\infty} \underbrace{\int_0^t u(\tau) d\tau}_g \cdot \underbrace{e^{-st}}_{f'} dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau \Big|_{0+}^{\infty} - \int_{0+}^{\infty} u(t) \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} dt \\ &= \left(0 + \frac{1}{s} u(0+)\right) + \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \end{aligned}$$

$$\text{Voraussetzung: } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau = 0$$

Allgemein:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau) d\tau\right\} = \frac{u(0+)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{u(t)\}$$

7.1 Die Laplace-Transformation

Schritte 1 und 4: Eigenschaften der Laplace-Transformation

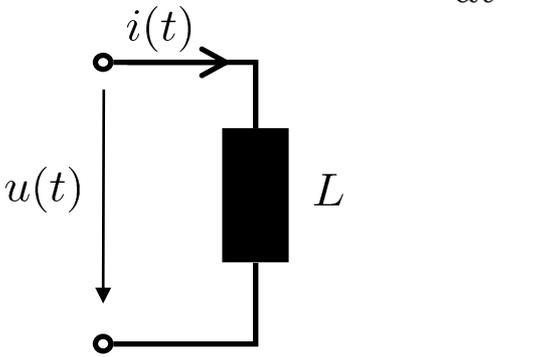
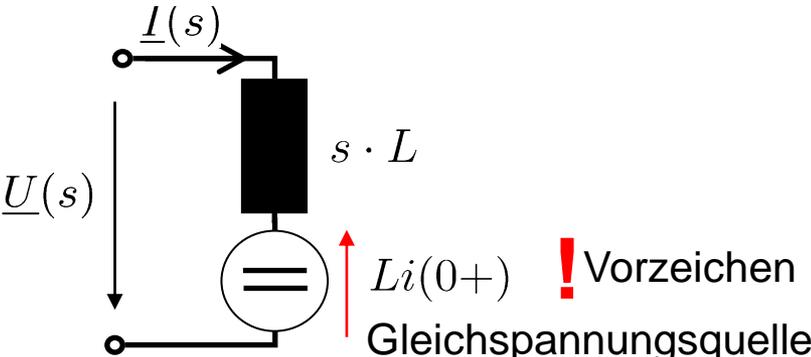
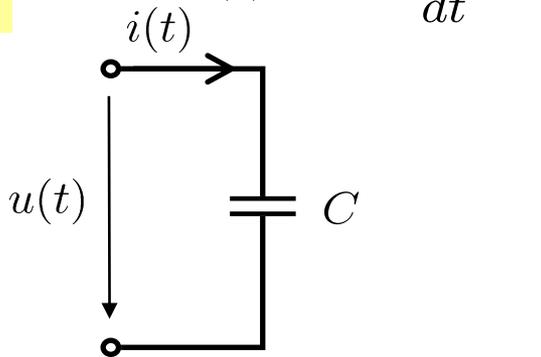
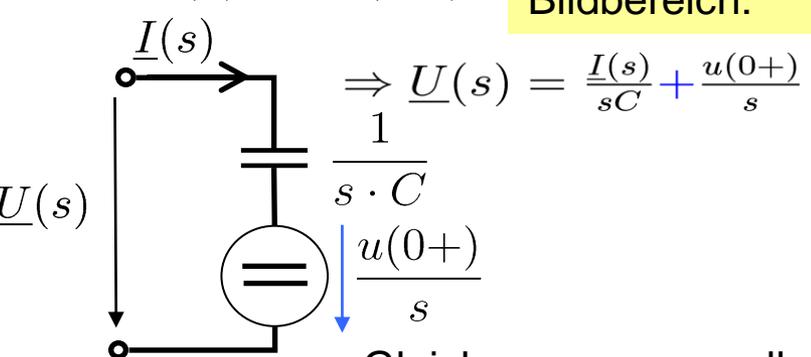
$$u(t) \quad \circ \bullet \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \underline{U}(s), \quad s = \sigma + j\omega, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \bullet$ Bildbereich	
Transformation	$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \underline{U}(s)e^{st} ds$	$\underline{U}(s) = \int_{0+}^{\infty} u(t)e^{-st} dt$
$u(t)$ rein reell ...	$u(t) = u^*(t)$	$\underline{U}(s) = \underline{U}^*(s^*)$
Zeit-Verschiebung	$u(t - t_0)$	$\underline{U}(s) \cdot e^{-st_0}$
Frequenz-Verschiebung	$u(t) \cdot e^{-ct}$	$\underline{U}(s + c)$
Zeit- & Frequenz-Skalierung	$u(c \cdot t)$	$\frac{1}{ c } \cdot \underline{U}\left(\frac{s}{c}\right) \quad c \in \mathbb{R}, c > 0$
Differentiation	$\frac{du(t)}{dt}$	$s\underline{U}(s) - u(0+)$
Integration	$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \mathcal{L}\{u(t)\} + \frac{u(0+)}{s}$
Überlagerung	$c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t)$	$c_1 \cdot \underline{U}_1(s) + c_2 \cdot \underline{U}_2(s)$
Faltung	$u(t) * h(t)$	$\underline{U}(s) \cdot \underline{H}(s)$
Anfangswerttheorem	$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s\underline{U}(s)$
Endwerttheorem	$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s\underline{U}(s)$

© T. Fingscheidt, Vorlesung "Einführung in die Elektrotechnik für Medienwissenschaftler", TU Braunschweig

7.2 Die Laplace-Ersatzschaltbild

Schritt 2: Netzwerkelemente im Bildbereich

<p>Induktivität im Zeitbereich:</p> 	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}(s) = sL\underline{I}(s) - Li(0+)$	<p>Induktivität im Bildbereich:</p>  <p>! Vorzeichen Gleichspannungsquelle</p>
<p>Kapazität im Zeitbereich:</p> 	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}(s) = sC\underline{U}(s) - Cu(0+)$	<p>Kapazität im Bildbereich:</p>  <p>Gleichspannungsquelle</p>

7.2 Das Laplace-Ersatzschaltbild

Schritt 3: Rechnung im Bildbereich

Der erste und der zweite Kirchhoff'sche Satz gelten auch im Bildbereich:

1) Knotengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m [\pm \underline{I}_{\nu}(s)] = 0$$

2) Maschengleichung:

$$\sum_{\nu=1}^m [\pm \underline{U}_{\nu}(s)] = 0$$

3) Ohm'sches Gesetz:

$$\underline{U}(s) = R \cdot \underline{I}(s)$$

Kondensator:
Anfangsspannung

Zusammenhang von Strom und
Spannung an einer Kapazität:

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{I}(s)}{sC} + \frac{u(0+)}{s}$$

Zusammenhang von Strom und
Spannung an einer Induktivität:

$$\underline{U}(s) = sL\underline{I}(s) - Li(0+)$$

Spule: Anfangsstrom

7.2 Das Laplace-Ersatzschaltbild

Schritt 3: Rechnung im Bildbereich, Grenzbetrachtungen

Stromsprung am Kondensator: $\underline{I}(s) = \frac{I_0}{s}$

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{I}(s)}{sC} + \frac{u(0+)}{s}$$

Wie ist die Spannung sofort?

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underline{U}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{I_0}{sC}} + u(0+) = \underline{u(0+)}$$

Anfangswerttheorem \Rightarrow Der Kondensator verhält sich zu Beginn wie ein Kurzschluss!

Spannungssprung an der Spule: $\underline{U}(s) = \frac{U_0}{s}$

$$\underline{I}(s) = \frac{\underline{U}(s)}{sL} + \frac{i(0+)}{s}$$

Wie ist der Strom sofort?

$$\lim_{t \rightarrow 0+} i(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underline{I}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{U_0}{sL}} + i(0+) = \underline{i(0+)}$$

Anfangswerttheorem \Rightarrow Die Spule verhält sich zu Beginn wie ein Leerlauf!

7.3 Die Rücktransformation

Schritt 4: Rücktransformation

Die Rücktransformation in den Zeitbereich führen wir immer über die Korrespondenztabelle (**S. 171**) durch! Ggfs. muss auch ein Theorem angewandt werden (**S. 177**).

In vielen Fällen (z.B. lineare zeitinvariante Systeme) ist die Laplace-Transformierte durch eine gebrochen rationale Funktion darstellbar.

Die gebrochen rationale Funktion wird in Partialbrüche zerlegt.

Die Partialbrüche werden dann mit Hilfe der Korrespondenztabelle einzeln zurück transformiert und das Ergebnis durch Überlagerung der Einzelresultate gebildet.

7.3 Die Rücktransformation

Schritt 4: Rücktransformation über Partialbruchzerlegung

Zerlegung gebrochen rationaler Funktionen in Partialbrüche

$$r(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}$$

1. Falls der Grad $n \geq m$, so wird zunächst $A(s)$ durch $B(s)$ dividiert.
2. Der Divisionsrest wird dann in Partialbrüche zerlegt.

Zerlege den Nenner $B(s)$ in Faktoren

$$(s - b_{01})^{k_1} \dots (s - b_{0\alpha})^{k_\alpha} \dots (s^2 + q_1 s + p_1)^{l_1} \dots (s^2 + q_\beta s + p_\beta)^{l_\beta}$$

Zu jedem Faktor der Form $(s - b_{0i})^{k_i}$ gehören Partialbrüche der Form

$$\frac{A_{i1}}{s - b_{0i}} + \frac{A_{i2}}{(s - b_{0i})^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(s - b_{0i})^{k_i}}$$

und zu jedem Faktor der Form $(s^2 + q_i s + p_i)^{l_i}$

$$\frac{sB_{i1} + C_{i1}}{s^2 + q_i s + p_i} + \frac{sB_{i2} + C_{i2}}{(s^2 + q_i s + p_i)^2} + \dots + \frac{sB_{il_i} + C_{il_i}}{(s^2 + q_i s + p_i)^{l_i}}$$

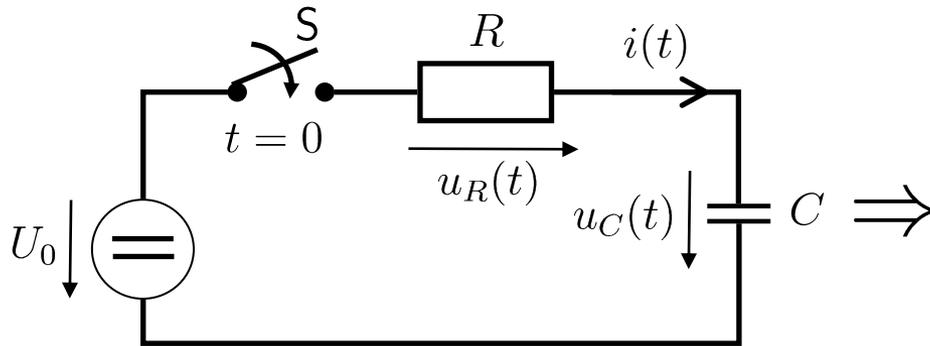
Die Faktoren A_{ij} , B_{ij} und C_{ij} werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

7.4 Anwendung der Laplace-Transformation

Beispiel: Aufladen eines Kondensators

Beispiel vom Beginn des Kapitels:

Schritte 1 und 2: Laplace-Ersatzschaltbild



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen.

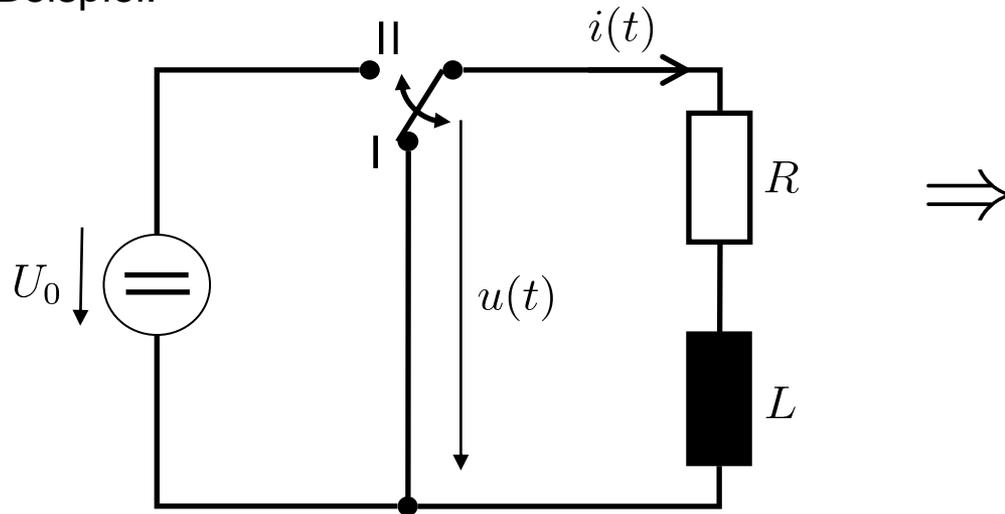
Wie sieht der zeitliche Verlauf der Spannung am Kondensator $u_c(t)$ aus, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kondensator die Ladung Q_c trägt?

7.4 Anwendung der Laplace-Transformation

Beispiel: Strom in der Spule

Beispiel:

Schritte 1 und 2: Laplace-Ersatzschaltbild



Der Schalter ist für $t < 0$ in Position I.

Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in Position II geschaltet (und bleibt dort). Berechnen Sie den Strom $i(t)$.

Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in Position II geschaltet und zum Zeitpunkt T_R in Position I zurückgeschaltet. Berechnen Sie den Strom $i(t)$.

7.4 Anwendung der Laplace-Transformation

Bedeutung der Laplace-Transformation

Der Erfolg der Laplace-Transformation beruht auf ...

... der einfachen Bildfunktion $\frac{1}{s}$ für die Sprungfunktion im Zeitbereich

... dem Differentiationssatz und der damit möglichen einfachen Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

... umfangreichen Tabellen für die Rücktransformation

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Vielen Dank für Ihr Durchhaltevermögen!

Sie haben nun die Grundlagen der
Elektrotechnik kennengelernt.

Alle Achtung!

Nun kommt in ein paar Tagen die Prüfung.

Wir möchten, dass Sie gut bestehen!

Wir tun von unserer Seite alles dafür,
dass es dazu kommt.

Tun Sie das auch!

Prof. T. Fingscheidt
Institut für Nachrichtentechnik (IfN)
Technische Universität Braunschweig



Technische
Universität
Braunschweig

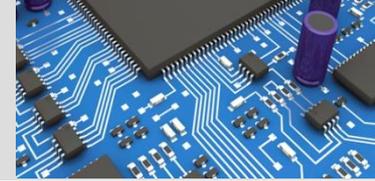
Sommersemester 2025 | Prof. T. Fingscheidt | Elektrotechnische Grundlagen der Technischen Informatik | 190/183



Institut für Nachrichtentechnik

1.1 Signale und Systeme

Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)



Eine wichtige Klasse von Systemen wird durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Diese Systeme sind **linear** und **zeitinvariant** (*linear time-invariant system*, kurz: LTI-System).
(i.a. „verschiebungsinvariant“ = *linear shift-invariant*, LSI-System)

Das Eingangssignal $s(t)$ und das Ausgangssignal $g(t)$ eines LTI-Systems ist durch eine zeitunabhängige Abbildung $g(t) = \mathfrak{T}\{s(t)\}$ miteinander verbunden.

Schreibschrift-T

Für beliebige Eingangs- und Ausgangssignale $g_i(t) = \mathfrak{T}\{s_i(t)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$\mathfrak{T}\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i \cdot \mathfrak{T}\{s_i(t)\} = \sum_i g_i(t)$$

Linearität

$$g(t - t_0) = \mathfrak{T}\{s(t - t_0)\}$$

Zeitinvarianz

