

Übungsblatt 3: Komplexe Wechselstromrechnung

Wiederholung:

- Komplexe Zahlen (siehe Tutorial, Skript S.92 - 101):

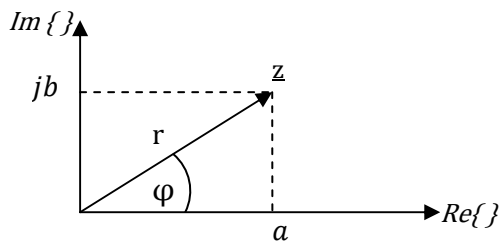
$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1$$

$$\underline{z} = a + jb = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r e^{j\varphi} \quad (\text{Eulersche Formel})$$

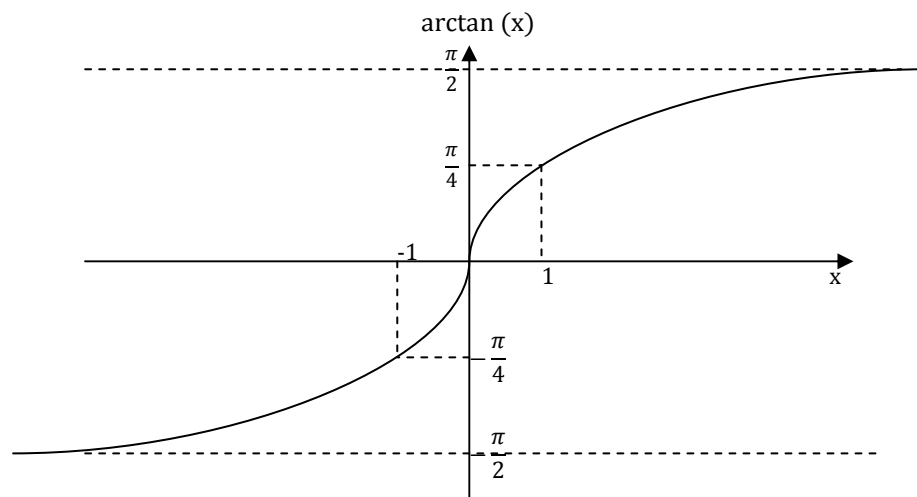
$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Betrag})$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{z}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{z}\}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{Phase})$$

$$\underline{z}^* = a - jb \text{ (konjugiert komplex)} \Rightarrow r^2 = |\underline{r}|^2 = \underline{z} \underline{z}^*$$



- allgemeine Hinweise zur Arkustangens - Funktion:



$$-\arctan(-x) = \arctan(x) \quad (\text{Punktsymmetrie})$$

$$\arctan\left(\pm \frac{1}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$\frac{a+bj}{c+dj} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

4 mögliche Fälle:

- | | | |
|---|-------------|-----------------------------------|
| (i) $\operatorname{Re}\{\underline{z}\}, \quad \operatorname{Im}\{\underline{z}\} > 0 \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ | 1. Quadrant | } Achtung bei
Taschenrechnern! |
| (ii) $\operatorname{Re}\{\underline{z}\}, < 0, \operatorname{Im}\{\underline{z}\} > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ | 2. Quadrant | |
| (iii) $\operatorname{Re}\{\underline{z}\}, \quad \operatorname{Im}\{\underline{z}\} < 0 \Rightarrow \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ | 3. Quadrant | |
| (iv) $\operatorname{Re}\{\underline{z}\}, > 0, \operatorname{Im}\{\underline{z}\} < 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ | 4. Quadrant | |

- Ableitungsregeln:

Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Kettenregel: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$

Beispiel:

$f(x)$	a	ax	x^n	e^x	e^{ax}	$1/x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	a	nx^{n-1}	e^x	ae^{ax}	$-1/x^2$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

- Die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ können mit dieser Regel gelöst werden: Sie

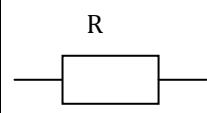
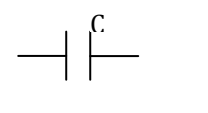
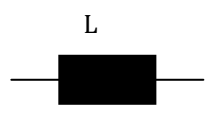
besagt, dass man Zähler und Nenner für sich getrennt ableite und den Grenzwert des resultierenden Bruchs betrachte (evtl. mehrmalige Anwendung nötig).

Beispiel:

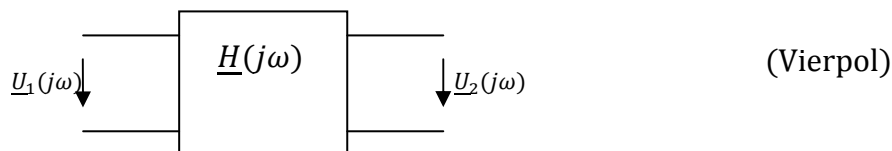
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^4} \right) \text{ ergibt } \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{4x^3} \right) \text{ ergibt } \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{12x^2} \right) \text{ ergibt } \infty$$

- Komplexe Berechnung von Netzwerken (Skript, S.102 - 115):

komplexwertiger Widerstand: Impedanz $\underline{Z} = \frac{U}{I}$ (Ohmsches Gesetz)

 $\underline{Z} = R$ Ohmscher Widerstand	 $\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ Kondensator	 $\underline{Z} = j\omega L$ Spule	$\Rightarrow$ Parallelschaltung: $\frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \sum_{\gamma=1}^m \frac{1}{\underline{Z}_{\gamma}}$ $\Rightarrow$ Reihenschaltung: $\underline{Z}_{ges} = \sum_{\gamma=1}^m \underline{Z}_{\gamma}$
--	---	---	--

- Übertragungsfunktion eines Netzwerks (Skript, S. 117)



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = |\underline{H}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

(Frequenzgang)

$$|\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega)\})^2}$$

(Betrag)

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega)\}}\right)$$

(Phase)

- Def.: Grenzfrequenz $\omega_0 \Rightarrow |\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

- Schaltungen mit frequenzselektiven Eigenschaften (Filter): Hochpass, Tiefpass, Bandpass und Bandsperre.