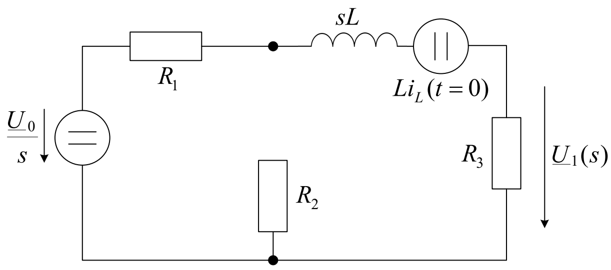
Einführung in die Elektrotechnik für Medienwissenschaftler
Elektrotechnische Grundlagen der Technischen Informatik

Übungsblatt 4 (Lösung)

Aufgabe 1

a) Strom $i_L(t=0)$ unmittelbar nach dem Umschalten des Schalters?
$i_L(t=0) = 0$ (eingeschwungener Zustand, keine Quelle im Schaltkreis sondern nur Verbraucher und kein Stromsprung an einer Spule)

b) LAPLACE-Ersatzschaltbild



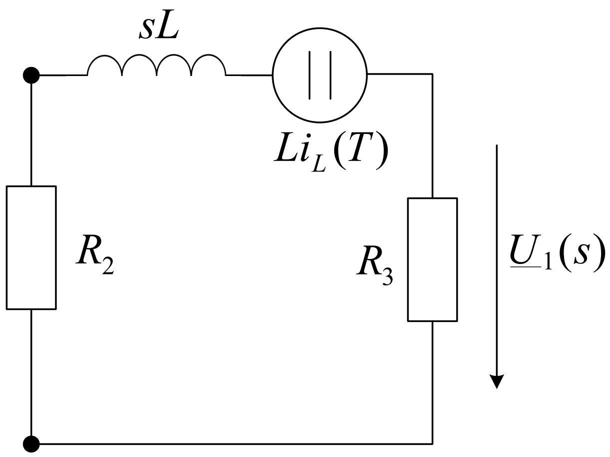
c) $\underline{U}_1(s)$, die LAPLACE-Transformierte von $u_1(t)$?
$\underline{U}_1(s) = \frac{\underline{U}_0}{s} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3 + sL}$

d) $u_1(t)$, die invers LAPLACE-Transformierte von $\underline{U}_1(s)$?
Form $\frac{c}{s(s+c)}$
$\underline{U}_1(s) = \frac{R_3\underline{U}_0}{R_1 + R_3} \cdot \frac{c}{s(s+c)}$ wobei $c = \frac{R_1 + R_3}{L}$ ist.
$\Longrightarrow u_1(t) = \frac{R_3\underline{U}_0}{R_1 + R_3} \cdot (1 - e^{-ct}) = 4V(1 - e^{-10^4 \frac{1}{s} t}); t \geq 0$

Es gilt für weitere Berechnungen: $T \leq t \leq \infty$

e) Strom $i_L(t = T)$ unmittelbar nach dem Umschalten des Schalters S?
$i_L(t = T) = \dfrac{\underline{U}_0}{R_1 + R_3} = 1mA$

f) LAPLACE-Ersatzschaltbild



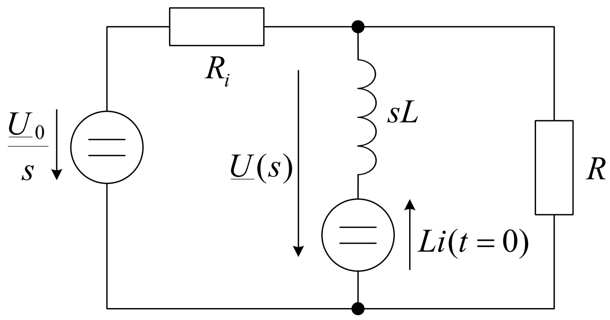
g) $\underline{U}_1(s)$, die LAPLACE-Transformierte von $u_1(t)$
$\underline{U}_1(s) = \dfrac{i_L(T)R_3}{\frac{R_2+R_3}{L} + s}$

h) $u_1(t)$ als invers LAPLACE-Transformierte von $\underline{U}_1(s)$?
Form: $\dfrac{1}{s+c}$
$\underline{U}_1(s) = i_L(T)R_3 \cdot \dfrac{1}{s + \frac{R_2+R_3}{L}} = i_L(T)R_3 \cdot \dfrac{1}{s+c}$ wobei $c = \dfrac{R_2 + R_3}{L}$
$\Longrightarrow u_1(t) = i_L(T)R_3 \cdot e^{-ct} = 4V \cdot e^{-10^4 \frac{1}{s} t}; t \geq 0$

i) Verlauf der Spannung $u_1(t)$ für Zeiten $t \geq 0$:
$$u_1(t) = \begin{cases} 4V \cdot (1 - e^{-10^4 \frac{1}{s} t}), & 0 \leq t \leq T; \\ 4V \cdot e^{-10^4 \frac{1}{s} t}, & T \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Aufgabe 2

a) LAPLACE-Ersatzschaltbild



b) Die LAPLACE-Transformierte $\underline{U}(s)$ der Spannung $u(t)$ für $t \geq 0$?

$$\frac{\underline{U}(s)}{\frac{U_0}{s}} = \frac{\frac{sLR}{sL+R}}{R_i + \frac{sLR}{sL+R}} = \frac{sLR}{R_i(sL+R)+sLR} = \frac{sLR}{s(R_iL+LR)+R_iR}$$

$$\Rightarrow \underline{U}(s) = \frac{U_0}{s} \cdot \frac{sLR}{s+\frac{R_iR}{(R_i+R)L}} \cdot \frac{1}{(R_i+R)L} = \frac{U_0R}{R_i+R} \cdot \frac{1}{s+\frac{R_iR}{(R_i+R)L}}$$

c) Die $u(t)$ als invers LAPLACE-Transformierte von $\underline{U}(s)$?

$\underline{U}(s) = \frac{U_0R}{R_i+R} \cdot \frac{1}{s+c}$ wobei $c = \frac{R_iR}{(R_i+R)L}$

aus der LAPLACE-Transformationstabelle: $e^{-ct} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+c}$

$$u(t) = \frac{U_0R}{R_i+R} \cdot e^{-\frac{R_iR}{(R_i+R)L}t}; t \geq 0$$

d) Die Größen der Bauelemente R und L?

Aus der Diagramm in Bild 1 werden die folgenden Werte abgelesen:

- $u(t=0) = 4V$
- $u'(t=0) = -\frac{4V}{9 \cdot 10^{-4}s}$

Bestimmung von R und L

- Bestimmung von R:

  aus $u(t=0) = \frac{U_0R}{R_i+R} \cdot e^0$ und $u(t=0) = 4V$

  $$\Rightarrow R = \frac{u(t=0)R_i}{U_0 - u(t=0)} = 20\Omega$$

- Bestimmung von L:

  $$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{d(\frac{U_0R}{R_i+R} \cdot e^{-\frac{R_iR}{(R_i+R)L}t})}{dt} = \frac{U_0R}{R_i+R} \cdot (-\frac{R_iR}{(R_i+R)L}) \cdot e^{-\frac{R_iR}{(R_i+R)L}t}$$

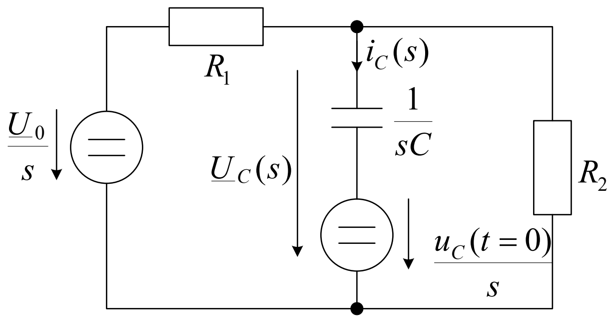
  $$\Rightarrow u'(t=0) = -U_0 \cdot \frac{R_iR^2}{(R_i+R)^2L} \cdot e^{-0}$$

  $$\Rightarrow L = \frac{-U_0}{u'(t=0)} \cdot \frac{R_iR^2}{(R_i+R)^2} = 6mH$$

Aufgabe 3

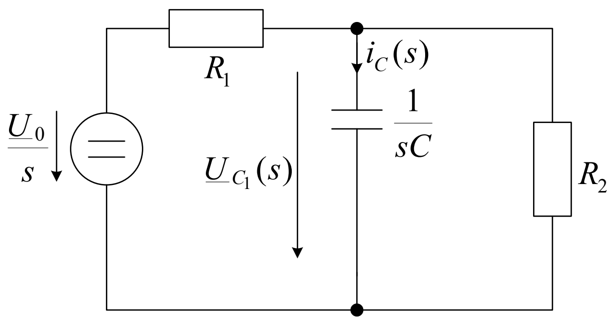
a) die Spannung $u_C(t=0)$ unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S?
$u_C(t=0) = U_0 = 20V$ (es gibt keinen Spannungssprung am Kondenasator; er ist somit voll geladen, da er für Gleichspannung einen Leerlauf darstellt und im Schaltkreis kein Strom fließen kann)

b) LAPLACE-Ersatzschaltbild



c) $\underline{U}_C(s)$ (die LAPLACE-Transformierte von $u_C(t)$)?
Zwei Quellen im Netzwerk $\Longrightarrow$ Überlagerungsgesetz (Superpositionsgesetz): $\underline{U}_C(s) = \underline{U}_{C_1}(s) + \underline{U}_{C_2}(s)$

– Bestimmung von $\underline{U}_{C_1}(s)$ bei $\frac{u_C(0+)}{s} = 0$



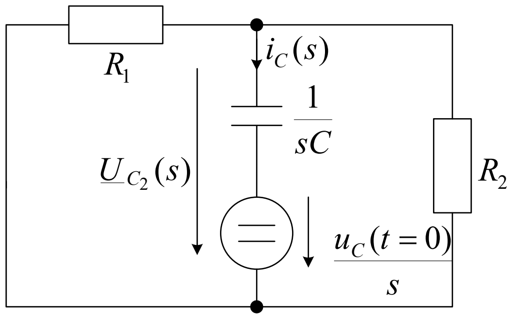
$$\frac{\underline{U}_{C_1}(s)}{\frac{\underline{U}_0}{s}} = \frac{\frac{\frac{1}{sC}R_2}{\frac{1}{sC}+R_2}}{R_1 + \frac{\frac{1}{sC}R_2}{\frac{1}{sC}+R_2}} = \frac{R_2}{sCR_2R_1 + R_2 + R_1}$$

$$\Longrightarrow \underline{U}_{C_1}(s) = \frac{\underline{U}_0}{s} \cdot \frac{R_2}{sCR_2R_1 + R_2 + R_1} = \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{c}{s(s+c)} \text{ wobei } c = \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}$$

– Bestimmung von $\underline{U}_{C_2}(s)$ bei $\frac{\underline{U}_0}{s} = 0$

$$\frac{\underline{U}_{C_2}(s)}{\frac{\underline{u}_C(0+)}{s}} = \frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{1}{sC}} = \frac{sCR_1R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2}$$

$$\Longrightarrow \underline{U}_{C_2}(s) = \frac{\underline{u}_C(0+)}{s} \cdot \frac{sCR_1R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2} = \underline{u}_C(0+) \cdot \frac{1}{s + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}} = \underline{u}_C(0+) \cdot$$



$$\frac{1}{s+c} \text{ wobei } c = \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}$$

d) $u_c(t)$ als invers LAPLACE-Transformierte von $\underline{U}_C(s)$?

- $u_{C_1}(t) = \dfrac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2} \cdot (1 - e^{-ct})$,
- $u_{C_2}(t) = \underline{u}_C(0+) \cdot e^{-ct}$ und
- $\underline{u}_C(0+) = \underline{U}_0$

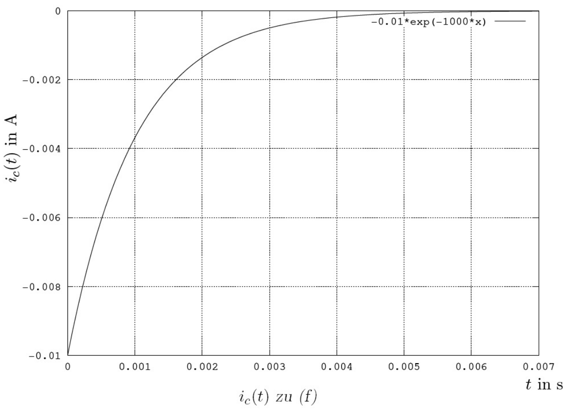
$$\Longrightarrow u_C(t) = \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2} + (\underline{U}_0 - \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2}) \cdot e^{-ct} \text{ wobei } c = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

e) Strom $i_C(t)$?

$$\begin{aligned}
i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} &= C \cdot [\frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2} + (\underline{U}_0 - \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2}) \cdot e^{-ct}] \frac{1}{dt} \\
&= C \cdot [0 - c(\underline{U}_0 - \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2}) \cdot e^{-ct}] \\
&= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot (\underline{U}_0 - \frac{\underline{U}_0 R_2}{R_1 + R_2}) \cdot e^{-ct}
\end{aligned}$$

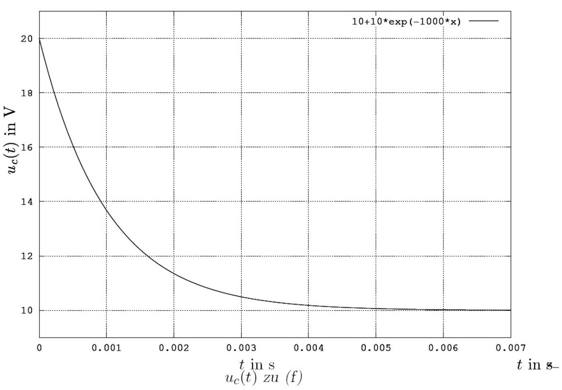
f) Die Verläufe des Stromes $i_C(t)$ und der Spannung $u_C(t)$?

- $i_c(t)$



$i_c(t)$ *zu (f)*

- $u_c(t)$



$u_c(t)$ *zu (f)*