



Analysis für Elektrotechnik Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

24. April 2025

Abgabe bis spätestens **24. April 2025** um **13.00 Uhr** in den Briefkästen hinter PK 43.

Das Übungsblatt wird in der darauffolgenden Woche in den kleinen Übungen besprochen.

Aufgabe A.2.1 (Abbildungen)

Geben Sie für die folgenden Abbildungen jeweils an, welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv erfüllt sind, und bestimmen Sie das jeweils angegebene Urbild:

- (a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_1(n) = n^2$ und $f_1^{-1}(\{0, 9, 25\})$,
- (b) $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_2(n) = n^2$ und $f_2^{-1}(\{0, 9, 15, 25\})$,
- (c) $f_3 :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \ln x$ und $f_3^{-1}(\{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\})$,
- (d) $f_4 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_4(z) = \frac{z}{|z|}$ und $f_4^{-1}(\{j\})$.

Aufgabe A.2.2 (Injektive Funktionen auf endlichen Mengen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$. Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$.

- (a) Zunächst sei $n < m$. Wie viele verschiedene injektive Funktionen $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ gibt es dann? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Nun sei $n > m$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es **keine** injektive Abbildung $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ geben kann.
- (c) Ändert sich Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (b), wenn Sie die Voraussetzung auf $n \geq m$ abändern?

Aufgabe A.2.3 (Konvergenz)

Beweisen Sie die Konvergenz der nachstehenden Folgen durch Überprüfung der Definition 2.1 aus der Vorlesung:

- (a) $a_n := \frac{2n+1}{n+1}$,
- (b) $b_n := \frac{6n^2+2n-1}{3n^2-n}$.

Hinweis: Prüfen Sie die Definition, indem Sie zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass der Abstand vom n -ten Folgenglied für $n \geq n_0$ zum Grenzwert kleiner als ε ist. Sie müssen dazu den Grenzwert kennen, dieser ist in beiden Fällen 2.

Aufgabe A.2.4 (Geometrische Reihe)

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

für $|q| < 1$ konvergiert, indem Sie nachweisen, dass die Definition 2.1 aus der Vorlesung erfüllt ist.
Hinweis: Gehen Sie vor, wie in der vorigen Aufgabe. Überlegen Sie sich den Grenzwert zu Beginn selbst. Nutzen Sie die geometrische Summenformel aus Aufgabe A.o.3.